LP 01 Conservation en mécanique du point et du solide de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. Exemples et applications.

Introduction: On peut envisager la mécanique classique, d'un point de vue formel, comme l'énoncé du principe fondamentale de la dynamique et du théorème du moment cinétique. Il existe cependant une autre manière de voir les choses, strictement équivalente d'un point de vue de la résolution des problèmes, mais procédant d'un autre point de vue, et qui procède de trois lois de conservations:

- la conservation de l'énergie
- la conservation de la quantité de mouvement
- la conservation du moment cinétique.

Nous allons ici définir ces trois grandeurs ainsi que les lois de conservation qui leur sont associées, et nous les illustrerons par quelques uns des nombreux exemples et applications.

A) Conservation de l'énergie:

1) Définitions et énoncé:

Personne aujourd'hui ne sait ce qu'est l'énergie en soi, mais tout le monde en exploite les lois de conservations, qui sont extrêmement générales et ne se limitent pas à la seule mécanique. C'est en particulier cette conservation que traduit le premier principe de la thermodynamique.

Cette hypothèse de conservation traduit en fait le postulat d'invariance temporelle de l'univers, et plus précisément au niveau de l'expérimentateur de l'approximation de cette invariance pour un système considéré comme isolé. Celle-ci signifie en fait que, si l'on se place pour faire une expérience dans des conditions identiques (ceci ne constituant toujours qu'une approximation, mais étant théoriquement possible), mais à deux dates différentes, celle-ci va se dérouler de manière identique.

Pour illustrer cette invariance, considérons une masse accrochée à un ressort maintenu comprimé par un taquet. On sait alors que si on enlève le taquet, le ressort va se détendre, induisant un mouvement.

On dit alors que le système constitué de la masse possède une certaine énergie potentielle, cette appellation traduisant la potentialité d'un mouvement. Le postulat d'invariance temporelle se traduit ici par le fait que, si l'on fait la manipulation maintenant ou dans un temps indéterminé, et si rien ne vient modifier le système entre-temps, son comportement va être rigoureusement le même.

Il y a donc une grandeur qui s'est conservée au cours du temps, et on appelle cette grandeur *énergie* (ici potentielle).

Il existe de multiple formes d'énergie:

- l'énergie potentielle dont nous venons de parler
- l'énergie cinétique, qui traduit le fait qu'un système possède une vitesse, comme son nom l'indique
- l'énergie thermique
- l'énergie électromagnétique…

Ici nous nous limiterons à *l'énergie mécanique*, qui ne se conserve que lorsque les autres formes d'énergie ne varient pas, et qui est définie par $E_m = E_c + E_p$, où E_c est *l'énergie cinétique*, définie par:

- pour un point matériel $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- pour un système de points matériels par $E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$
- pour un solide par $E_c = \iiint_V \frac{1}{2}v^2(M)dm$, et qui s'écrit pour un solide $E_c = \frac{1}{2}mv_g^2 + \frac{1}{2}J\vec{\Omega}^2$, où J est le moment d'inertie du système et $\vec{\Omega}$ son vecteur rotation instantané.

Et E_p est l'énergie potentielle, définie à partir des forces pouvant s'écrire sous la forme $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_p$, qui s'appellent *forces conservatives*.

Les autres forces font en général intervenir d'autres types d'énergie, comme par exemple les frottements.

Ecrivons alors le PFD, en supposant pour l'instant qu'il n'y a que des forces conservatives: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}^{cons}$. En multipliant scalairement cette équation par $\vec{v}$, on a:

$$\frac{d\frac{mv^2}{2}}{dt} = \sum_i \vec{F}.\vec{v} = \sum_i \vec{F}.\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\sum_i \vec{F}.d\vec{l}}{dt} = -\frac{d\,\overrightarrow{grad}E_p.d\vec{l}}{dt}.$$

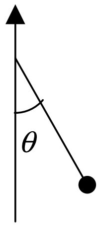
On a donc alors bien $E_c + E_p = E_m = cste$. Inversement, si on dérive cette relation, on obtient le PFD.

La conservation de l'énergie est donc rigoureusement équivalentes au PFD. On peut alors quantifier la perte d'énergie, si il existe des forces non conservatives:

$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$, et donc $\Delta E_m = W_{A\to B}^{\vec{F}\,N.C.}$.

2) Le pendule simple:

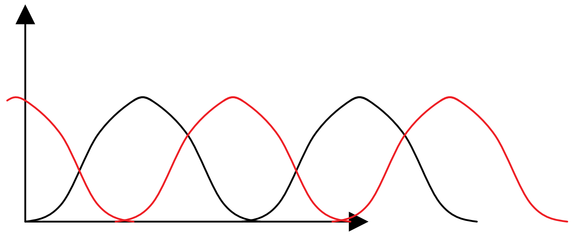
Nous allons introduire sur un cas d'école un certains nombre d'utilisation du principe de conservation. Considérons donc un pendule simple, constitué d'une tige de masse négligeable de longueur l et d'une masse m. L'énergie s'écrit alors simplement $E_m = \frac{1}{2}ml\,\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$. Si alors on se place dans l'approximation des petits mouvements, on obtient $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$, et



on retrouve en dérivant le principe fondamental de la dynamique $ml^2\ddot{\theta} + +mgl\theta = 0$, ce qui se résout en $\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$, avec des conditions initiales d'écartement donné et de vitesse nulle.

Illustrons alors la conservation de l'énergie mécanique:

On a $E_p = \frac{mgl}{2}\theta_0 \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ et $E_c = \frac{mgl}{2}\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$. On voit alors bien que l'énergie mécanique totale est conservée, mais traçons les courbes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle:

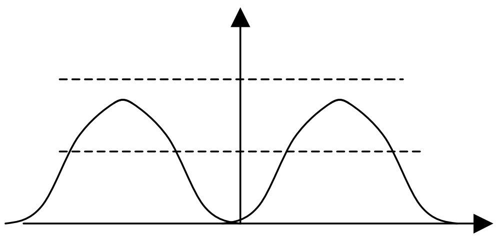


On constate alors qu'il y a un échange permanent entre les deux formes d'énergie, l'énergie potentielle étant maximale quand l'énergie cinétique est nulle et inversement.

Jusqu'ici, la conservation de l'énergie mécanique ne nous a pas apporté grand chose de plus que le PFD.

Cependant on va voir que même hors du cadre de l'approximation linéaire, on peut prévoir qualitativement le mouvement.

Traçons en effet le graphe de l'énergie potentielle.

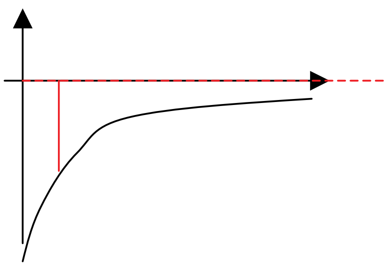


On voit alors que l'on peut voir sur le graphique deux cas:

- soit l'énergie mécanique totale est en dessous de la bosse, auquel cas le mobile effectue des oscillations dans le creux
- soit l'énergie mécanique est au dessus, et le mobile fait des tours complets.

On peut alors généraliser ceci à des cas plus compliqués. En effet, supposons par exemple que l'on ait un rail suivant le mouvement de la masse et que celui-ci soit solidaire d'un ressort qui impose une énergie potentielle $\frac{C}{2}\theta^2$. Le tracé de l'énergie potentielle nous permet qualitativement de déterminer à l'avance, sans aucun calcul mathématique. On voit alors que selon les valeurs de *E*, la masse va pouvoir passer une fois la verticale, ou deux fois…

On peut alors appliquer ceci à tout système, et en particulier à un calcul qui présente le mérite d'être utilisé: la vitesse de libération d'une fusée. Il s'agit de savoir quelle vitesse minimale il faut communiquer à une fusée pour se libérer de l'attraction terrestre.



L'énergie potentielle associée à cette attraction vaut $E_p = -G\frac{M_T m}{r}$. On voit alors sur le graphique que cette libération ne peut se faire que si $E_m \geq 0$. L'énergie cinétique initiale minimum à donner à la fusée vaut donc l'écart entre cette valeur et l'énergie potentielle initiale, soit:

$E_{c,\min} = G\frac{mM_T}{R_T}$, et donc $v_{i,\min} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$.

B) Conservation de la quantité de mouvement:

1) Définitions et énoncé:

Tout comme la conservation de l'énergie, la conservation de la quantité de mouvement procède d'un principe d'invariance: le principe d'invariance par translation dans l'espace. Ceci signifie juste que si rien n'agit sur le système considéré, autrement dit si il y a bien invariance de l'univers ambiant par translation (ceci ne constitue en fait toujours qu'une approximation), alors la grandeur $\vec{p} = m\vec{v}$ pour un point matériel se conserve. Pour un solide, elle s'écrit:

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{v}(M)dm = \frac{d}{dt}\left(\iiint_V \overrightarrow{OG}dm + \iiint_V \overrightarrow{GM}dm\right) = m\vec{v}_G .$$

Ceci est équivalent au PFD. En effet, pour un système *isolé*, et donc de masse constante, on a $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, soit $\vec{p} = cste$.

La conservation de la quantité de mouvement est donc plus restrictive que la conservation de l'énergie: il faut que le système soit totalement isolé. On en déduit alors la variation de la quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{‘dt} = \sum \vec{F}_{ext}$, les forces internes se compensant par principe d'action –réaction.

2) Mouvement d'une fusée:

Etudions à présent, pour illustrer cette conservation, le mouvement d'une fusée dont le mode de propulsion est l'éjection de gaz à la vitesse $\vec{v}_g$ dans le référentiel fixe. Soit $\vec{v}$ la vitesse de la fusée, et *M* la masse de la fusée à l'instant *t*, celle-ci éjectant entre *t* et *t*+*dt* la quantité *dm* de gaz.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit, pour l'ensemble isolé fusée+gaz: $d(M\vec{v}) + dm\vec{v}_g = 0$, soit donc en développant $Md\vec{v} + \vec{v}dM + dm\vec{v}_g$. Or on a $dM = -dm$, et donc $M\vec{v}_g - dM(\vec{v}_g - \vec{v}) = 0$, soit $Md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$, où $\vec{u}$ est la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. L'équation différentielle obtenue est donc $dv = -u\frac{dM}{M}$. Si on suppose alors que l'éjection se fait de telle sorte que $u = C^{ste}$, alors $\boxed{v = v_0 + u\ln\frac{M_0}{M}}$

3) Collisions:

On considère à présent deux objets rentrant en collision. La collision est un modèle pour décrire une interaction entre deux particules dans une zone petite de l'espace (petite devant les distances parcourues par les particules). L'ensemble des particules étant supposé isolé, on a la conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement. Cependant, la modélisation ne nous permet pas d'avoir accès à l'énergie potentielle et donc on définit deux types de chocs:

- les chocs élastiques où l'énergie cinétique totale se conserve
- les chocs inélastiques où ce n'est pas le cas.

Dans le cas d'un choc élastique, on a:

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$ ainsi que $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$.

Nous n'allons pas ici rentrer dans le détail d'une étude générale, mais simplement étudier quelques cas simples:

Si les deux mobiles sont identiques, on a $\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p'^2_1}{2m} + \frac{p'^2_2}{2m}$ et, en élevant la conservation de la quantité de mouvement au carré, $p_1^2 = p'^2_1 + p'^2_2 + 2\vec{p}'_1 . \vec{p}'_2$, ce qui implique que $\vec{p}'_1 \perp \vec{p}'_2$.

…

C) Conservation du moment cinétique:

1) Définitions et énoncé:

Comme les deux autres grandeurs, la conservation du moment cinétique est reliée à l'invariance par rotation dans l'espace.

Ceci est plus clair sur un exemple: considérons un solide en rotation autour d'un axe fixe. Ce mouvement est caractérisé par son moment cinétique qui vaut $\vec{j}_O = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm$.

De manière générale, pour un solide en rotation autour d'un axe, on montre que le moment cinétique se met sous la forme $\vec{j} = J_\Delta \vec{\Omega}$.

Intuitivement, on voit alors que s'il n'y a aucune force perpendiculaire à l'axe de rotation, soit aucun couple selon cet axe, la vitesse angulaire va être constante et donc le moment cinétique conservé. Or la non existence d'actions de cette nature caractérise bien l'invariance de l'univers ambiant par rotation autour de l'axe Δ.

Par ailleurs, la variation du moment cinétique s'écrit $\frac{d\vec{j}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i$.

2) Deuxième loi de Kepler:

Kepler a établi pour décrire le mouvement des planètes trois lois, qui sont:

- la trajectoire d'une planète est plane et est une ellipse dont le Soleil est un foyer
- l'aire balayée par $\vec{r}$ pendant un temps donné est une constante du mouvement
- la période au carré est proportionnelle à la longueur au cube du grand axe.

Nous nous proposons ici de démontrer simplement la seconde loi de Kepler:

L'aire balayée pendant *dt*, vaut, par définition:

$dA = \frac{1}{2} r(rd\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. Par ailleurs, le moment cinétique s'écrit $\vec{L}_0 = mr^2 \overset{o}{\theta}$. Ecrivons alors le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \overrightarrow{SM} \wedge \vec{F} = 0$ car la force est une force centrale. On a donc $\vec{L} = Cste = \frac{dA}{dt}$. CQFD

3) Mouvement d'une toupie:

On considère une toupie qui tourne autour d'un point fixe *O* et soumise uniquement à son poids. Ici il n'y a pas invariance de l'espace par rotation autour de l'axe de rotation, et donc le moment cinétique n'est pas conservé. On va voir cependant que la variation de celui-ci nous permet de déterminer qualitativement le mouvement de la toupie.

La variation du moment cinétique en O s'écrit:

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$. Or on peut montrer que si la toupie tourne très vite sur elle même, le moment cinétiques est en permanence aligné avec l'axe de rotation propre. De plus, l'égalité ci dessus implique que la composante selon l'axe vertical va être conservée, ainsi que sa norme:

$$\vec{L}_0 . \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dL_O^2}{dt} = \vec{0}$$
$$\vec{e}_z . \frac{d\vec{L}_O}{dt} = . \frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$$
.

Le seul effet du couple du poids va donc être de modifier l'orientation de moment cinétique, et donc de l'axe de la toupie. Celle-ci va donc décrire un cône d'axe de révolution la verticale en O: on dit alors que la toupie précesse autour de l'axe Oz. Ceci peut s'appliquer à beaucoup de corps en rotation. En particulier, ce petit raisonnement permet de comprendre la précession des équinoxes de la terre, qui est soumise à un couple similaire à celui du poids par effet différentiel des autres planètes.

On peut par ailleurs déterminer la relation entre la vitesse de précession et la vitesse de rotation propre:

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}_O$, avec $\vec{\omega}_p = -\frac{m\vec{g}l}{L_O} = \frac{mgl}{I\overset{o}{\phi}}\vec{e}_z$.

3) Accélération d'une patineuse:

On sait que lorsqu'une patineuse tourne sur elle même les bras écarté, puis qu'elle ferme les bras, sa vitesse de rotation augment de manière spectaculaire. Ceci peut être interprété qualitativement avec la conservation du moment cinétique.

Supposons pour cela que la patineuse tourne autour d'un axe vertical et que l'on puisse négliger l'action des frottements. Le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation est alors constant et on a $L_{avant} = L_{après}$. Ceci signifie que $J_{avant}\omega_{avant} = J_{après}\omega_{après}$. Lorsque la patineuse ferme les bras, elle diminue son moment d'inertie, ce qui implique que, par conservation du moment cinétique, la vitesse de rotation doit augmenter.