

LP 02 Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Exemples

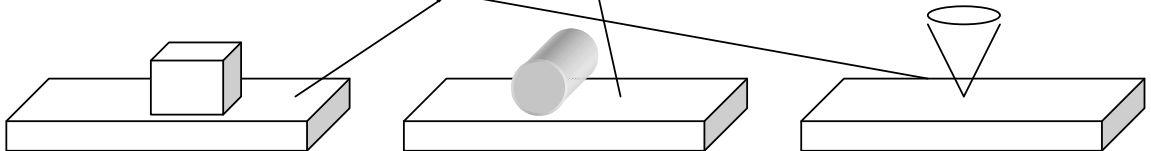
Introduction:

A) Cinématique du contact:

1) Vitesse de glissement:

Considérons deux solides S et Σ en mouvement dans un référentiel R de manière à ce qu'il restent toujours en contact. Ce contact peut se traduire par:

- une surface commune ←
- une ligne commune ←
- un ou plusieurs points communs ←



Il existe donc au moins un point I_S de S en coïncidence avec un point I_Σ de Σ . On appelle alors par définition *vitesse de glissement de S sur Σ en I à l'instant t* la vitesse définie par:

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_S)_{/R} - \vec{v}(I_\Sigma)_{/R}$$

La vitesse de glissement n'est en fait rien d'autre que la vitesse de I_S de S dans un référentiel lié à Σ .

Si on suppose que l'on peut toujours définir un plan tangent P commun à S et à Σ , alors la vitesse de glissement est forcément dans ce plan, puisque le solide S ne s'enfonce pas dans Σ et que l'on fait l'hypothèse, dans toutes l'étude qui suit, que le contact entre les deux solides est maintenu.

On dit par ailleurs que S ne glisse pas sur Σ si la vitesse de glissement est nulle en tout point de contact.

2) Roulement et pivotement de S par rapport à Σ .

Dans le référentiel R , nous pouvons introduire les vecteurs rotations $\vec{\Omega}_S$ et $\vec{\Omega}_\Sigma$ des solides S et Σ .

Les vitesses de tout point M_S de S sont alors données par:

$$\vec{v}(M_S) = \vec{v}(I_S) + \vec{\Omega}_S \wedge \overrightarrow{IM_S}$$

De même, les vitesses d'un point M_Σ de Σ sont données par:

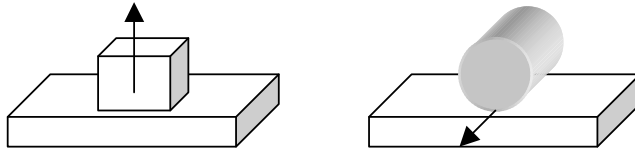
$$\vec{v}(M_\Sigma) = \vec{v}(I_\Sigma) + \vec{\Omega}_\Sigma \wedge \overrightarrow{IM_\Sigma}$$

Par définition, on appelle *vecteur rotation relatif* le vecteur défini par:

$$\vec{\Omega}_{S/\Sigma} = \vec{\Omega}_S - \vec{\Omega}_\Sigma$$

Ce vecteur peut se décomposer en deux composantes :

- un vecteur normal au plan P en I : c'est le *vecteur rotation de pivotement* $\vec{\Omega}_N$.
- Un vecteur dans le plan P en I : c'est le *vecteur rotation de roulement* $\vec{\Omega}_T$.



B) Actions mécaniques de contact:

Sans rentrer dans les détails des interactions au niveau microscopique entre les particules de Σ et de S , nous allons représenter les actions de contact du solide Σ sur le solide S par un torseur défini par:

- sa résultante $\vec{R}$
- son moment en un point I de contact $\vec{M}_{I,contact}$.

Les actions de contact qui apparaissent alors sont à priori des inconnues. Leur introduction dans les relations dynamiques classiques entraîne donc l'apparition de nouvelles inconnues. En général, le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations (en effet, les actions de contact introduisent à priori six inconnues supplémentaires, et si on veut étudier l'évolution d'un système à un paramètre, par exemple l'angle pour une roue, cela fait sept inconnues pour six équations données par les projections de la RFD et du théorème du moment cinétique).

Il faut donc introduire des relations phénoménologiques pour pouvoir résoudre le problème.

1) Différents frottements:

Nous pouvons décomposer :

- la résultante $\vec{R}$ en
 - une composante $\vec{T}$ en I dans le plan tangent commune à S et à Σ .
 - Une composante $\vec{N}$ en I portée par la normale au plan
- Le moment $\vec{M}_{I,contact}$ en
 - Une composante $\vec{M}_{I,t}$ dans le plan tangent
 - Une composante $\vec{M}_{I,n}$ portée par la normale

$\vec{N}$ s'appelle la réaction normale, $\vec{T}$ la force de frottement de glissement, $\vec{M}_{I,t}$ moment de frottement de roulement et $\vec{M}_{I,n}$ le moment de frottement de pivotement.

Souvent, nous ne tiendrons pas compte des moments de frottement de pivotement et de roulement:

- soit parce que les solides seront uniquement en translation
- soit parce que le contact sera supposé ponctuel (ou éventuellement rectiligne dans le cas d'un problème plan).

Dans ce cas, le torseur des actions mécaniques de contact se réduira à une résultante $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$.

2) Lois de Coulomb

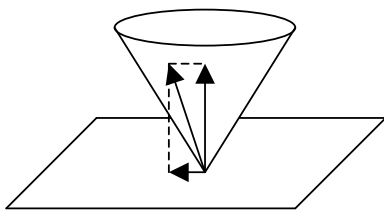
a) en ce qui concerne la réaction normale $\vec{N}$, dans le cas d'une liaison unilatérale, la réaction normale exercée par Σ sur S est dirigée de Σ vers S . Ceci semble normal vu que c'est cette force qui empêche le solide S de passer à travers son support!

b) en ce qui concerne la force de frottement de glissement, ses propriétés sont différentes suivant que S glisse ou non sur Σ .

- si la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ n'est pas nulle, alors $\vec{T}$ et $\vec{v}_g$ sont colinéaires et de sens contraires, ce qui s'exprime par $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$ et $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$. Les modules de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$ sont proportionnels. On définit ainsi un coefficient de frottement de glissement f positif par $\|\vec{T}\| = f_c \|\vec{N}\|$
- si la vitesse de glissement est nulle, on s'aperçoit que en dessous d'une certaine force appliquée pour tirer le solide, celui-ci reste immobile. Il existe donc une force de frottement de glissement telle que $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$. En toute rigueur, les coefficients f_s et f_c sont différents. Phénoménologiquement, on s'aperçoit que la force que l'on doit exercer pour mettre en mouvement le solide est plus grande que celle que l'on doit appliquer pour le maintenir une vitesse de glissement constante. On a donc $f_c < f_s$. Cependant, la différence est assez faible et dans de nombreux cas nous écrirons $f_c = f_s = f$. **Pour quelques valeurs de f , H prépa 2^{ème} année p97.**

3) Notion de cône de frottement:

On pose parfois $f = \tan \phi$, ce qui définit un angle de frottement et un cône de glissement, dans la mesure où on considère que $f_c = f_s = f$:



- si le solide glisse, alors $\vec{R}$ est sur la surface du cône.
- si le solide est immobile, alors $\vec{R}$ est à l'intérieur du cône.

4) Approche énergétique:

On sait que la puissance d'une action extérieure s'écrit:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}(A_S) + \vec{M}_A \cdot \vec{\Omega}_S$$

Explicitons cette relation dans deux cas particuliers, où on considère comme système les deux solides S et Σ qui restent en contact durant le mouvement.

a) Les deux solides sont en translation dans R :

On a alors:

- $\vec{\Omega}_S = \vec{\Omega}_\Sigma = \vec{0}$
- tous les points de S ont la même vitesse à un instant donné, ainsi que tous les points de Σ .

La puissance s'écrit donc:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}(I_S) + (-\vec{R}) \cdot \vec{v}(I_\Sigma) = \vec{R} \cdot \vec{v}_g$$

b) Si les deux solides sont en contact ponctuel (ou rectiligne cf plus haut).

On néglige alors les frottements de roulement et de pivotement et on a encore:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}(I_S) + (-\vec{R}) \cdot \vec{v}(I_\Sigma) = \vec{R} \cdot \vec{v}_g$$

On voit donc sur ces deux exemples particuliers que dans les deux cas:

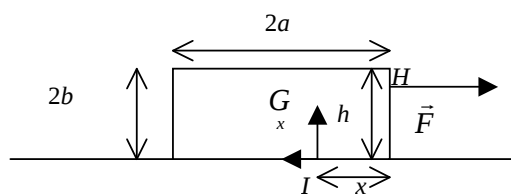
$$P = \vec{T} \cdot \vec{v}_g$$

La puissance dissipée par les actions de contact est donc toujours négative (en fait c'est ce qui amène à dire que $\vec{T}$ et $\vec{v}_g$ sont de sens opposés). Cette puissance est nulle dans deux cas:

- $\vec{T} = 0$: il n'y a pas de frottements
- $\vec{v}_g = 0$: il n'y a pas de glissement

C) Quelques conséquences:

1) Un premier exemple : Equilibre d'un solide sur le sol.



Et on veut savoir à quelles conditions sur F le solide reste immobile.

Comme la surface n'est pas ponctuelle, on a à priori tous les types de frottements.

Le torseur des actions mécaniques de contact sol – solide s'écrit donc en I :

$$(\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}; \vec{M}_{I, \text{contact}})$$

A l'équilibre, la résultante des actions mécaniques extérieures est nulle soit:

$$N = mg \quad N > 0$$

$$T = F \quad T > 0$$

Le solide ne glisse pas sur le sol si $T < fN$ soit si $F < fmg$.

Le moment des actions mécaniques extérieures, qui s'exercent sur le solide, est nul en tout point. En I , il vaut:

$$\vec{IG} \wedge m\vec{g} + \vec{IH} \wedge \vec{F} + \vec{II} \wedge \vec{R} + \vec{M}_{I, \text{contact}} = \vec{0}, \text{ d'où } [(x-a)mg + hF]\vec{e}_z + \vec{M}_{I, \text{contact}} = \vec{0}$$

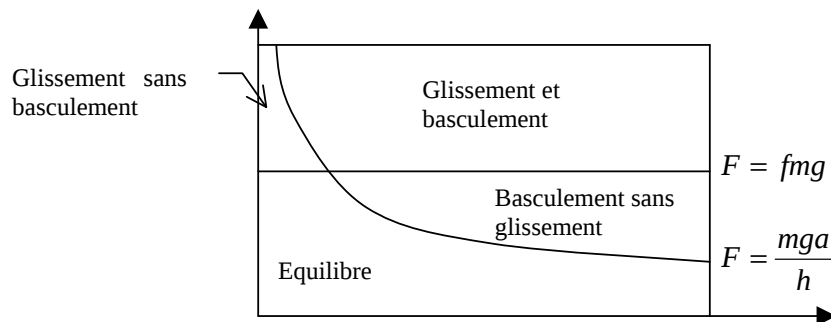
On constate alors que le frottement est uniquement un frottement de roulement.

On considère alors un point I tel que $(x-a)mg + hF = 0$.

Les conditions que l'on doit alors imposer sont que I soit entre O et A , soit $0 \leq x = a - \frac{F}{mg}h \leq 2a$. La seconde conditions est alors toujours vraie, mais la première impose:

$$F \leq mg \frac{a}{h}$$

Si cette condition n'est pas respectée, alors le solide va basculer autour de O .
On peut alors tracer un graphe:



2) Effet d'arc-boutement:

Considérons un solide S de masse m sur un support horizontal. On veut le faire glisser en lui appliquant une force $\vec{F}$ qui fait un angle α par rapport à la verticale, le point d'application de $\vec{F}$ étant choisi pour que le solide ne puisse basculer (grosso modo en arrière de G).

On suppose par ailleurs pour simplifier que le poids est négligeable devant F .

$$m \ddot{x} = -T + F \sin \alpha$$

$$0 = N - F \cos \alpha$$

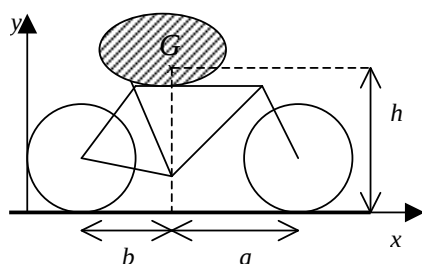
- Si S reste immobile, alors : $T \leq fN$, soit $F \sin \alpha \leq f.F \cos \alpha$ et donc $\tan \alpha \leq \tan \varphi$
- Si S est en mouvement alors $T = fN$ on a donc $\alpha \geq \varphi$ et l'accélération vaudra donc:

$$\ddot{x} = F(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

C'est l'effet d'arc-boutement qui explique pourquoi un écrou ne descend pas sur une vis lorsqu'il est soumis à son poids. Le filetage de la vis est choisi de telle sorte que $\alpha < \varphi$.

3) Utilité des frottements:

On veut étudier ici le démarrage d'un cycliste:



Le théorème de la résultante dynamique nous donne:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = T_1 + T_2 \\ 0 = N_1 + N_2 - mg \end{cases}$$

On voit alors tout de suite que si T_1 et T_2 sont nulles (pas de frottements), alors le cycliste ne peut démarrer (comme sur de la glace). Les frottements sont donc très utiles puisqu'il permettent le mouvement de tout mobile roulant, ainsi que la marche.

Le pédalier est de telle sorte que lorsque le cycliste exerce un couple $\Gamma > 0$ sur le pédalier, un couple moteur donné par $\Gamma_r = \frac{\Gamma}{n}$ s'exerce sur la roue arrière. En effet, en l'absence de frottement, la puissance est intégralement transmise du pédalier à la roue qui tourne n fois plus vite que le pédalier et $P = \Gamma_r \omega = \Gamma \frac{\omega}{n}$

Si on applique le théorème du moment cinétique aux deux roues en leur centre d'inertie respectifs, on trouve:

$J \frac{d\omega}{dt} = -T_2 R + \Gamma_r$, car en G le poids n'a pas de moment et le moment du châssis sur la roue n'a pas de composante selon Oz si on néglige les frottements (ceci signifie qu'il ne l'empêche pas de tourner), et $J \frac{d\omega}{dt} = -T_1 R$.

Si on utilise la condition de roulement sans glissement, c'est-à-dire $R\omega = \dot{x}$, on trouve que:

$$2J \frac{\dot{x}}{R} = -(T_1 + T_2)R + \Gamma_r, \text{ soit } \dot{x} = \frac{\Gamma_r}{2\frac{J}{R} + mR} \text{ et}$$

$$T_2 = \frac{1}{R} \left(\Gamma_r - \frac{J}{2\frac{J}{R} + mR} \Gamma_r \right) = \frac{\Gamma_r}{R} \left(1 - \frac{J}{2J + mR^2} \right) = \frac{\Gamma_r}{R} \left(\frac{J + mR^2}{2J + mR^2} \right) > 0$$

$$T_1 = -\frac{J}{R} \frac{\dot{x}}{R} = -\frac{\Gamma_r}{R} \frac{J}{2J + mR^2}$$

Si on néglige la masse des roues, on a $T_2 = \frac{\Gamma_r}{R}$ et $T_1 \ll T_2$

Ce résultat se retrouve en utilisant le fait que quand il y a roulement sans glissement, il n'y a pas d'énergie dissipée par les actions de contact et donc que:

$$\Gamma \frac{\omega}{n} = \Gamma_r \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = J \frac{d\omega}{dt} \omega + mR \dot{x} \dot{x}, \text{ soit bien } \dot{x} = \frac{\Gamma_r}{2\frac{J}{R} + mR}.$$

Il pourrait sembler de prime abord que plus le couple exercé par le cycliste est important, plus le vélo accélère. Il n'en est rien, car au dessus d'un certain couple limite, la condition de roulement sans glissement n'est plus vérifiée.

Pour que cette condition soit vérifiée, il faut que $T_k \leq N_k$. Pour déterminer le couple limite, déterminons N_1 et N_2 .

On applique pour cela le théorème du moment cinétique en G à l'ensemble cycliste + bicyclette. Le moment cinétique en G est nul car il s'écrit $\vec{L}_G = \iiint \vec{GM} \wedge \vec{v}(M) dm = \left(\iiint \vec{GM} dm \right) \wedge \vec{v}(M) = \vec{0}$ par définition si on néglige la contribution des roues (masse négligeable et au démarrage, c'est-à-dire vitesse angulaire peu élevée).

On a alors:

$$0 = N_2 b - T_2 h - T_1 h - N_1 a = N_2 b - T_2 h - N_1 a \text{ avec la même approximation.}$$

$$\text{On tire alors directement, avec } N_1 + N_2 = mg, \text{ que } N_2 = \frac{1}{a+b} \left(amg + h \frac{\Gamma_r}{R} \right).$$

Etant donné les approximations, la condition de non glissement sur la roue 1 est toujours vérifiée.

Sachant que lors d'un roulement sans glissement, $T_2 = \frac{\Gamma_r}{R}$, étudions le rapport

$$\frac{T_2}{N_2} = \frac{\Gamma_r(a+b)}{h\Gamma_r + Rmga} = \frac{a+b}{h} \left(1 - \frac{Rmga}{h\Gamma_r + Rmga} \right)$$

Cette fonction est une fonction croissante de Γ_r et qui varie quand celui-ci varie de 0 à l'infini de 0 à $\frac{a+b}{h}$, maximum de la fonction.

Deux cas se présentent alors:

- si $f > \frac{a+b}{h}$, alors on aura toujours $\frac{T_2}{N_2} < f$ et donc le cycliste démarre sans patiner quelque soit le couple initial.
- Si $f < \frac{a+b}{h}$ alors il existe un couple limite au dessus duquel il y aura glissement, ce

$$\text{couple étant donné par: } \Gamma = n\Gamma_r \leq \frac{n.f.Rmga}{a+b-fh} = \Gamma_{\text{limite}}$$

Ainsi, au démarrage, si le cycliste exerce un couple trop grand, la roue arrière aura tendance à patiner. C'est ce qu'il se produit avec des pneus lisses et une route verglacée.