

LP 03 Caractère non galiléen du référentiel terrestre. Conséquences

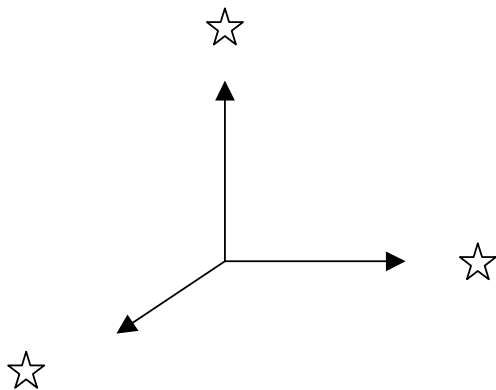
Introduction:

Nous avons vu au cours des leçons précédentes comment on exprimait la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen.

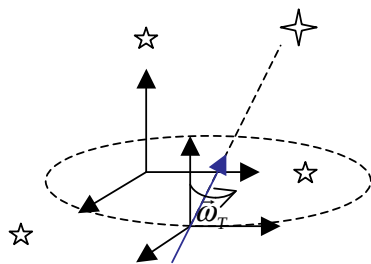
Aujourd'hui, nous allons appliquer ces résultats au référentiel terrestre qui, nous allons le montrer, n'est pas galiléen. Cette propriété a des conséquences pratiques très importantes, et nous allons en étudier quelques unes pour illustrer notre propos.

A) Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

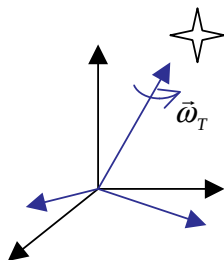
1) Différents référentiels utilisés:



On définit le référentiel de Copernic R_c par un repère lié à ce référentiel. Ce repère est centré sur le centre de masse du système solaire et ses trois axes pointent vers trois étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes. Pour des points matériels en mouvement dans le système solaire, ce référentiel est galiléen avec une excellente précision.



On définit le référentiel géocentrique R_g par un repère dont le centre se situe au centre d'inertie de la terre O et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Ce référentiel étant en mouvement de translation quasi circulaire, il n'est pas galiléen, puisque l'accélération de O dans R_c n'est pas nulle.



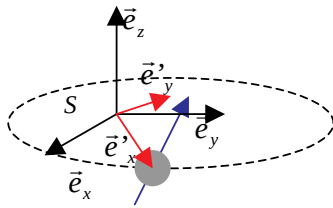
On définit enfin le référentiel terrestre R_T par un repère lié à la Terre dont le centre se situe en O et qui a un mouvement de rotation uniforme de pulsation $\vec{\omega}_T$, avec un de ses axes pointant grosso modo vers l'étoile polaire, d'angle avec la normale à l'écliptique d'environ 23° correspondant à une période T_{sid} d'un jour sidéral $T_{sid} = 86164s$. Ce référentiel, en rotation par rapport à un référentiel non galiléen, n'est donc pas galiléen.

2) Détermination du jour sidéral:

On sait qu'un jour solaire vaut $24h = 86400s$, ce qui est différent du jour sidéral exprimé ci dessus. En fait le jour sidéral correspond au temps que met la terre à faire un tour sur elle même dans le référentiel géocentrique, alors que le jour solaire correspond au temps que met un point de la terre entre l'instant où le soleil est au zénith et l'instant où il se retrouve dans la même configuration par rapport au soleil. Comme la terre tourne par ailleurs autour du soleil, ces deux durées sont différentes.

Pour effectuer le calcul, on fait deux hypothèses par effet de moyenne:

- on suppose que l'axe nord sud de rotation de la terre est normal au plan de l'écliptique
- on suppose que l'orbite terrestre est circulaire.



Le jour solaire correspond alors à la durée de révolution de la Terre sur elle même dans le référentiel $R'(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$. Il suffit alors d'appliquer la loi de composition des mouvements de rotation:

$$\vec{\Omega}_{R_T/R_c} = \vec{\Omega}_{R_T/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R_c}, \text{ et comme vecteur rotations sont}$$

supposés colinéaires, on obtient: $\frac{T_{orb}}{T_{sid}} = \frac{T_{orb}}{T_{sol}} + 1$. On a alors

$$T_{orb} = 366,25.T_{dis} \text{ et donc } T_{sid} = 86164s = 23h56mn04s, \text{ soit } \vec{\omega}_T = 7,3.10^{-5} \text{ rd.s}^{-1}.$$

3) Relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel géocentrique:

Elle s'écrit, puisque ce référentiel n'est pas galiléen:

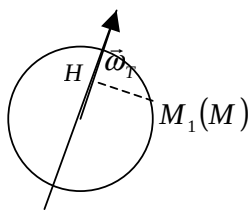
$m\vec{a}_r = \vec{F}_a + m\vec{G}_T(M) + m\vec{G}_A(M) - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$, où on a les forces appliquées, la gravitation exercée sur l'objet par la terre et les forces de gravitation exercées par les autres astres (soleil, lune, Jupiter...).

On suppose ensuite que la terre et les autres astres ont une masse à répartition sphérique et que la somme des forces gravitationnelles exercées sur la terre par les autres astres à pour expression $M_T \vec{G}_A(O)$.

Si on écrit alors la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel de Copernic appliqué à la Terre considérée comme un point matériel de masse M_T situé en O, on a:

$$M_T \vec{a}_a(O) = M_T \vec{G}_A(O) \text{ soit } \vec{a}_a(O) = \vec{G}_A(O).$$

Soit S le centre du référentiel de Copernic et M_1 le point coïncidant de M (point lié à R_T qui à tout instant coïncide avec M).



On a $\vec{SM}_1 = \vec{SO} + \vec{OM}_1$, ce qui donne, en dérivant deux fois par rapport au temps:

$$\frac{d^2 \vec{SM}_1}{dt^2} = \vec{a}_e = \vec{a}_a(O) + \frac{d^2 \vec{OM}_1}{dt^2}$$

Si on suppose à présent que le vecteur $\vec{\omega}_T$ est constant dans le référentiel géocentrique (en fait ceci n'est pas tout à fait vrai en raison de la précession des équinoxes), on a:

$$\frac{d^2 \vec{OM}_1}{dt^2} = -\omega_T^2 \vec{HM}, \text{ H étant la projection de M sur l'axe de rotation de la terre.}$$

On tire donc que $\vec{a}_e = \vec{G}_A(O) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$, et donc la relation fondamentale de la dynamique s'écrit, dans le référentiel terrestre:

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_a + m\vec{G}_T(M) + m[\vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(O)] + m\omega_T^2 \overrightarrow{HM} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$$

On observe que l'accélération s'écrit en cinq termes:

- les forces appliquées (tension d'un fil, poussée...)
- le champ de pesanteur terrestre
- un terme différentiel, ou terme de marée.
- Une force centrifuge
- La force de Coriolis

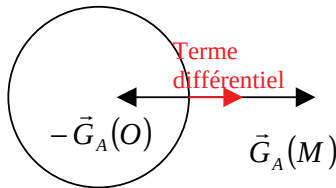
Calculons à présent les ordres de grandeurs de ces différents termes:

Le champ de pesanteur terrestre est de l'ordre de $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$

La norme du terme différentiel est maximale lorsque les deux forces sont alignées. Elle vaut alors, pour un astre donné:

$$GM_A \left(\frac{1}{(d-R)^2} - \frac{1}{d^2} \right) = GM_A \left(\frac{1}{d^2} \left[\left(1 - 2\frac{R}{d} + \frac{R^2}{d^2} \right)^{-1} - 1 \right] \right) \approx 2GM_A \frac{R}{d^3} = 2g_0 \frac{M_A}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_A} \right)^3,$$

Ce qui donne pour la lune $1,1 \cdot 10^{-7} g_0 \approx 1,1 \cdot 10^{-6} m.s^{-2}$
et pour le soleil $5,1 \cdot 10^{-8} g_0 \approx 5,1 \cdot 10^{-7} m.s^{-2}$.



La force centrifuge, ou plutôt l'accélération associée, vaut $\omega_T^2 R_T \sin \lambda$, où λ est la latitude du lieu considéré. Elle varie donc entre 0 et $3,39 \cdot 10^{-2} m.s^{-2}$

De manière générale, on pourra donc négliger le terme différentiel, sauf dans le cas des marées, où les masses mises en jeu sont très importantes, d'où son nom de terme de marée.

B) Conséquences:

1) Conséquences liées au terme inertiel:

a) Définition du poids:

On définit le poids d'une masse m par l'annulation des forces subies par cette masse lorsqu'elle est suspendue au bout d'un fil. L'équilibre se traduit alors par:

$$\overrightarrow{\text{tension du fil}} + \overrightarrow{\text{poids}} = \vec{0}$$

La direction du fil fournit alors la direction de la verticale locale.

Si on applique alors le PFD à cette masse à l'équilibre, on a:

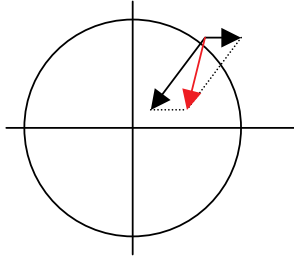
$$\vec{0} = \vec{T} + m\vec{G}_T(M) + m[\vec{G}_A(M) \xrightarrow{\text{Négligeable}} \vec{G}_A(O)] + m\omega_T^2 \overrightarrow{HM}$$

On identifie alors cette expression à l'expression précédente : $\vec{0} = \vec{T} + m\vec{g}(M)$, d'où on tire:

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \omega_T^2 \overrightarrow{HM}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrira donc: $m\vec{a}_r = \vec{F}_a + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$

Schéma explicatif:



Le terme axifuge est évidemment un terme correctif, vu qu'il est très petit devant le champ de gravitation terrestre. Cependant, il faut en tenir compte lorsqu'on veut faire des mesures précises du champ de pesanteur.

On peut d'ailleurs déterminer l'angle du vecteur $\vec{g}$ avec le champ de gravitation terrestre, c'est à dire la direction portée par le rayon de la terre en ce lieu.

On a directement:

$$\frac{\omega_T^2 HM}{\sin \alpha} = \frac{g}{\sin \lambda}$$

$$\text{d'où on tire que } \sin \alpha = \frac{\omega_T^2 R_T \cos \lambda \cdot \sin \lambda}{g} = \frac{\omega_T^2 R_T \sin 2\lambda}{2g}$$

L'angle α est donc maximal pour $\lambda = 45^\circ$ et vaut alors $\alpha = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 6'$. Cet angle est très faible et c'est pour

cette raison que nous nous permettons quelquefois d'assimiler la verticale locale à la direction du champ de gravitation terrestre.

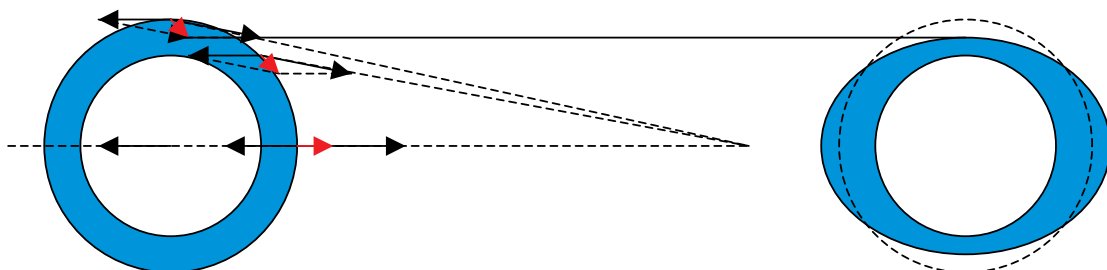
Par ailleurs, l'étude des variations de ce champ est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît dans cette approche, puisqu'il faudra tenir compte de la forme moyenne de la terre (géoïde, reflée à l'équateur où g est donc plus faible qu'aux pôles) et tenir également compte des reliefs et des cavités en sous-sol.

b) Phénomène de marée:

Nous allons ici étudier un cas où il n'est pas possible de négliger les effets inertiels : le phénomène de marée. Cependant, nous allons nous limiter à une approche qualitative graphique.

Pour commencer, nous ne tiendrons compte que de la Lune, qui est le terme prépondérant dans les effets de marée.

On simplifie par ailleurs le problème en supposant que la terre est uniformément recouverte d'une couche d'eau qui serait sphérique en l'absence de terme de marée.



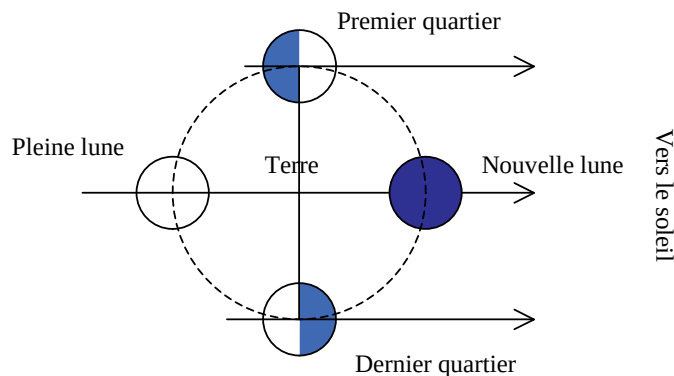
La présence de la lune a donc pour effet de déformer cette nappe d'eau : nous voyons l'apparition de bourrelet océanique. La dénivellation maximale est de l'ordre de 60 cm.

Supposons alors pour simplifier que la lune est dans le plan de l'écliptique et que la Terre tourne autour de la normale à l'écliptique. On constate donc que pour un point, il y aura deux marées par jour. En fait, en raison de la rotation propre de la lune autour de la terre de période apparente de 29 jours, il y aura un retard d'environ 50 mn par jour entre les marées hautes.

Cependant, on a vu qu'à l'équateur, le rapport vaut:

$$\frac{\text{terme solaire max}}{\text{terme lunaire max}} \approx 0,45. \text{ Il faut donc prendre en compte la position du soleil.}$$

Représentons quatre configurations bien connues de la Lune:



Lors de la pleine lune et de la nouvelle lune, les effets différentiels du soleil et de la lune s'ajoute. Les marées sont plus importantes : ce sont des marées de vives eaux (coeff>90)

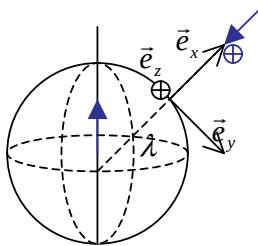
Dans les deux autres configurations, les termes différentiels se retranchent : ce sont les marées de mortes eaux (coeff<50).

Ceci constitue un modèle sommaire du phénomène de marée

et qui le décrit donc très sommairement. Celui-ci en effet ne rend compte ni des variations locales de l'amplitude des marées, ni du décalage observée entre la pleine lune et la marée de plus haut coefficient (pendant l'éclipse de soleil, le plus haut coefficient de marée est arrivé une semaine plus tard).

2) Effets dus au terme de Coriolis:

a) déviation vers l'est:



Si on considère que la vitesse est essentiellement verticale (on assimile la verticale locale au rayon local de la terre), on voit que la force de Coriolis pointe vers l'est : il y aura donc une déviation vers l'est du point de chute. Si on veut estimer cette déviation, on projette la relation fondamentale de la dynamique sur une base sphérique (x, y, z) .

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r, \text{ soit:}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -mg_0 + 2m\omega_T^2 \dot{z} \cos \lambda \\ m \ddot{y} = m\omega_T^2 \dot{x} \cos \lambda \sin \lambda + 2m\omega_T \dot{z} \sin \lambda \\ m \ddot{z} = -2m\omega_T \dot{y} \sin \lambda - 2m\omega_T \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

Si on se place à l'ordre 0 en ω_T , on obtient:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g_0 \\ \ddot{y} = 0, \text{ classique équation de la chute libre, qui donne } x = h - \frac{1}{2}g_0 t^2 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Si on réinjecte cette expression de x dans les équations en considérant cette fois l'ordre 1, on obtient:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ m y = 0 \\ m z = 2m\omega_T g_0 t \cos \lambda \end{cases}, \text{ soit } z = \frac{1}{3} t^3 \omega_T g \cos \lambda, y = 0, x = h - \frac{1}{2} g_0 t^2$$

Il est inutile de poursuivre plus loin pour conclure: l'effet principal de la force de Coriolis est une déviation vers l'est. Au second ordre, on aurait observé l'apparition d'une déviation vers le sud, dû à l'apparition d'une vitesse vers l'est qui fait apparaître une force dont une composante s'oppose à la chute et dont l'autre dévie vers le sud.

Le temps de chute est donné par $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et la déviation par $\Delta z = \frac{1}{3} \omega_T g \cos \lambda \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}}$

A.N. : pour $h = 150m$ et $\lambda = 50^\circ$, on trouve $\Delta z = 2,6cm$, effet tout à fait mesurable.

b) Le pendule de Foucault:

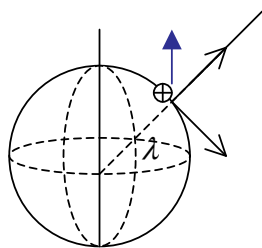
C'est une des manifestations les plus spectaculaires du caractère non galiléen du référentiel terrestre, et cette expérience a un intérêt historique énorme puisque c'est elle qui a démontré concrètement en 1851 le caractère non galiléen du référentiel terrestre. Elle consiste en un pendule oscillant suspendu en un point du référentiel terrestre, et on constate que le plan d'oscillation du pendule effectue un mouvement de rotation autour de la verticale locale.

Nous allons ici interpréter avec les mains ce phénomène.

Pour commencer, supposons que le pendule est situé au pôle.

Si on écrit la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel de Copernic, et en négligeant les termes d'attraction autre que celui de la terre, le pendule à dans ce référentiel un mouvement d'oscillation habituel. Un observateur situé sur la terre verra donc son plan d'oscillation tourner d'un tour en un jour sidéral, et ceci dans le sens inverse de la rotation de la terre.

Si maintenant on se place en n'importe quel point:



L'influence de la rotation de la terre sur le plan d'oscillation va procéder uniquement de la composante verticale de $\vec{\omega}_T$, puisque la vitesse est essentiellement horizontale. Donc tout se passe, du point de vue du plan d'oscillation, comme si la terre tournait autour de la verticale locale avec une vitesse angulaire correspondant à la projection sur la verticale du vecteur rotation.

$$\text{Or } \omega_{T, \text{vert}} = \omega_T \sin \lambda.$$

La pulsation du mouvement de rotation du plan d'oscillation sera donc $\Omega = \omega_T \sin \lambda$, et sa période $T = \frac{T_{\text{sid}}}{\sin \lambda}$.

Ce raisonnement qualitatif donne le résultat exact après un traitement calculatoire, où les mêmes approximations sont faites (c'est-à-dire que l'on néglige la composante verticale de la vitesse).

A Paris, au panthéon, par exemple, on a $\lambda \approx 48^\circ$, soit $T = \frac{86164}{\sin 48^\circ} = 1 \text{ jour } 8h12mn25s$,
c'est à dire qu'en une heure, le plan aura tourné d'environ 11° .