LP 05 Approximation gyroscopique.
Effets dans les domaines macroscopiques
Et microscopiques.

Introduction: Nous allons aujourd'hui nous servir des résultats généraux de la mécanique newtonienne pour étudier le mouvement d'un solide ayant pour unique degrés de liberté les trois mouvement de rotation autour d'un point *O*.

Par ailleurs, nous définirons en quoi constitue l'approximation gyroscopique et étudierons en quoi son comportement peut être qualifié de paradoxal, à certains égard. Enfin nous verrons quelques unes des multiples application de cette étude.

A) Etude du mouvement.

1) Position du problème et notations:

Comme exemple de solide possédant ces trois degrés de liberté, prenons une toupie (Montrer). On observe dans son mouvement trois types de rotation:

- la rotation propre, c'est-à-dire la rotation du solide autour de son axe de révolution
- la précession, c'est à dire la rotation de cet axe autour de la verticale
- la nutation, c'est à dire la variation de l'angle que fait cet axe avec la verticale.

Ainsi il est naturel d'introduire pour décrire le problème les *angles d'Euler*: Cf Perer + transparent déjà fait par Montrouge.

L'angle ϕ est l'angle de rotation propre, l'angle ψ correspond à la précession, et l'angle θ traduit la nutation.

En partant des considérations faites sur la toupie, on a donc $\vec{\omega}_{S/R} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_u + \dot{\phi}\vec{e}_{z'}$.

Pour obtenir le vecteur rotation dans la base liée à *R*, on doit exprimer les vecteurs $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_{z'}$ dans cette base.

On voit immédiatement que $\vec{e}_u = \vec{e}_x \cos\psi + \vec{e}_y \sin\psi$, $\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z \cos\theta - \vec{e}_v \sin\theta$ avec $\vec{e}_v = \cos\psi\vec{e}_y - \vec{e}_x \sin\psi$, d'où on tire que:

$$\boxed{\vec{\omega}_{S/R} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta}c\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta \\ \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{array}\right._{R}}$$

Par ailleurs, pour des solides ayant la symétrie de révolution, il peut être commode de se placer dans la *base de Résal*, définie par les vecteurs $(\vec{e}_u, \vec{e}_w, \vec{e}_{z'})$ liés au solide:

$$\boxed{\vec{\omega}_{S/R} = \left|\begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} \end{array}\right._{Re}}$$

, dont le vecteur rotation par rapport à *R* vaut $\vec{\omega}_{Re/R} = \dot{\theta}\vec{e}_u + \dot{\psi}\vec{e}_z$

Dans toutes la suite nous considérerons un solide de révolution lié en *O* par une liaison parfaite (c'est-à-dire dont le moment en *O* sera nul et qui ne dissipera pas d'énergie).

2) Etude du mouvement:

Ecrivons le théorème du moment cinétique pour un solide matériel de révolution, soumis à une force en son centre de masse C qui peut être différent de O et dont le moment par rapport à O est dirigé selon la ligne des nœuds Ou. Par exemple, un solide soumis à son poids correspond à la description précédente. Nous ne considérerons donc dans un premier temps que le poids du solide.

Comme le solide à la symétrie de révolution, sa matrice d'inertie s'écrit dans la base de Résal $I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$. Notons que c'est la symétrie de révolution qui fait que la matrice est diagonale dans cette base comme dans la base liée au solide $Ox'y'z'$. Le moment cinétique du solide en O a donc pour expression:

$$\vec{L}_{0/R} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi}\sin\theta \\ I_3\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\right) \end{array} \right.$$

, et sa dérivée dans la base de Résal s'écrit $\left(\dfrac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_{Re} + \vec{\omega}_{Re/R} \wedge \vec{L}_0$, soit:

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_R = \left| \begin{array}{l} I_1 \ddot{\theta} \\ I_2 \ddot{\psi}\sin\theta \\ I_3\left(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\phi}\right) \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} I_1 \dot{\theta} \\ I_1 \dot{\psi}\sin\theta \\ I_3\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\right) \end{array} \right.$$

Par ailleurs, le moment du poids en O s'écrit, dans la base de Resal $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ l \end{array} \right. \wedge mg \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right.$, ce qui mène aux trois équations du mouvement:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_1\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta\right) + I_3 \dot{\psi}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\right)\sin\theta = mgl\sin\theta \\ I_1\left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) - I_3 \dot{\theta}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\right) = 0 \\ I_3\left(\dfrac{d\,\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}}{dt}\right) = 0 \end{array}}$$

Examinons l'interprétation physique de ces trois équations.

La troisième traduit immédiatement la conservation de la composante du moment cinétique selon l'axe *z'*, ce qui est normal, étant donné que nous considérons la liaison comme parfaite et que le moment du poids est orthogonal à cette direction.

Si l'on multiplie l'équation 2 par $\sin\theta$, on obtient $I_1 \frac{d\,\overset{o}{\psi}\sin^2\theta}{dt} - I_3\omega_{z'}\overset{o}{\theta}\sin\theta = 0$, soit $I_1\overset{o}{\psi}\sin^2\theta + I_3\omega_{z'}\cos\theta = L_{O,z} = cste$. Cette équation traduit donc la conservation du moment cinétique selon l'axe vertical, ce qui était prévisible pour les mêmes raisons.

Enfin on peut montrer que la première équation traduit la conservation de l'énergie, le système n'étant soumis qu'à des forces conservatives (on suppose la liaison parfaite).

3) Approximation gyroscopique:

Cette approximation concerne les solides de révolutions. On dit que le mouvement d'un solide ayant la symétrie de révolution autour d'un point fixe satisfait à l'approximation gyroscopique si sa vitesse de rotation propre est très grande devant toutes les autres vitesses de rotation.

Ceci s'exprime par $\overset{o}{\phi} >> \overset{o}{\psi}, \overset{o}{\theta}$, et se traduit par $\boxed{\vec{\omega}_{S/R} = \omega_{S/R}\vec{e}_{z'}}$.

Le moment cinétique vaut alors $\vec{L}_{O,R} = I_3\overset{o}{\phi}\vec{e}_{z'}$.

Réécrivons alors les équations du mouvement dans le cadre de cette approximation:

Le théorème du moment cinétique s'écrit alors:

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g} = -\frac{mgl}{L_O}\vec{L}_0 \wedge \vec{e}_z$, puisque le moment cinétique est pratiquement porté par *OC*.

On peut tirer alors deux lois de conservation fondamentales de cette équation vectorielle:

- la conservation de la norme du moment cinétique total en la multipliant scalairement par $\vec{L}_O$, ce qui se déduisait aisément également de la conservation de la projection du moment cinétique selon *z*' dans le cas général
- la conservation de la composante verticale du moment cinétique, ce qui n'est pas spécifique de l'approximation gyroscopique mais tient à la direction des forces appliquées.

Ceci a une conséquence importante sur la nature du mouvement : le moment cinétique précessionne donc autour de l'axe vertical, et comme celui-ci est nécessairement porté par l'axe de rotation propre, ceci signifie que l'axe de révolution du solide décrit au cours du mouvement un cône d'axe *Oz* défini par la direction du champ de pesanteur et de demi angle au sommet θ_0 .

Par ailleurs, le solide ne présente plus de mouvement de nutation: écrivons en effet la seconde équation du mouvement général dans l'approximation gyroscopique. On obtient $\overset{o}{\theta}\overset{o}{\phi} = 0$. La vitesse de rotation propre ne pouvant être nulle, on en déduit qu'il n'y a pas de nutation.

On peut dans cette approximation tirer un certains nombre de résultats liant les diverses grandeur. Si on réécrit la première équation du mouvement dans l'approximation gyroscopique, on obtient $I_3 \overset{o}{\psi} \overset{o}{\phi} \sin\theta_0 = mgl \sin\theta_0$, ce qui nous permet de tirer la vitesse de précession $\boxed{\overset{o}{\psi} = \frac{mgl}{I_3 \overset{o}{\phi}} \vec{e}_z = \frac{mgl}{L_0} \vec{e}_z}$

Cette analyse explique par ailleurs bien le comportement apparemment paradoxal du gyroscope, et plus généralement de tout objet dont le mouvement satisfait à l'approximation gyroscopique.

En effet, le résultat précédent montre que l'effet d'une force verticale est de faire précesser le gyroscope, c'est-à-dire qu'elle à pour effet de déplacer le centre de masse dans une direction *horizontale*. Ce comportement diffère radicalement d'un objet sans rotation propre qui se comporte alors comme un pendule pesant.

Ce résultat peut être généralisé: considérons que l'on applique pendant un temps Δt une force $\vec{F}_0$.

On a alors, d'après le théorème du moment cinétique $\Delta\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}_O \Delta t$, perpendiculaire à la force appliquée. Or dans le cadre de l'approximation gyroscopique, la direction du moment cinétique est portée par l'axe de rotation propre, ce qui implique que, après l'action de la force, l'axe de rotation propre va s'aligner avec la direction du nouveau moment cinétique : l'action d'une force sur un objet dont le mouvement satisfait à l'approximation gyroscopique est de déplacer l'axe de rotation propre dans une direction *perpendiculaire à la direction de la force*. C'est ce qui explique par exemple que lorsque l'on se penche sur un vélo, celui-ci a tendance à tourner lorsque l'on roule : le poids exercé induit en effet un moment horizontal perpendiculaire à l'axe de rotation propre de la roue, qui va donc chercher à s'aligner avec ce nouveau moment.

Ce comportement paradoxal et l'approximation gyroscopique est à l'origine de nombreuses explications et applications. Nous allons en étudier quelques-unes.

B) Applications:

1) Gyroscope:

Un gyroscope est un solide de révolution tournant à grande vitesse autour de son axe de révolution et suspendu par son centre de masse de façon parfaite. Une de ses réalisations technologiques est ce que vous avec devant vous, qui a l'avantage de pouvoir être déséquilibré, c'est-à-dire d'avoir son centre de masse et son centre de rotation distincts ou équilibré.

Une autre réalisation est la réalisation par liaison à la Cardan Perez p.357

Toutes ses propriétés découlent alors de l'application du théorème du moment cinétique en O: $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \vec{0}$ si la liaison est parfaite.

Par rapport à un référentiel galiléen, le moment cinétique du gyroscope va donc être constant, et donc la direction de sa rotation propre également.

Cette propriété est mise à profit dans les situations où le référentiel galiléen considéré est le référentiel de Copernic:

- il peut servir à stabiliser une trajectoire. En effet, embarqué sur un véhicule (avion, navire…), il va indiquer une direction constant par rapport aux étoiles, et si ce dernier change de trajectoire, alors le gyroscope va tourner par rapport au véhicule. Un système adéquat peut donc permettre de redresser la trajectoire du véhicule. Ce système présente l'avantage par rapport à une boussole de n'être pas soumis aux aléas du champ magnétique (perturbations par une masse métallique, correction par rapport au nord géographique…).

- Il peut mettre en évidence la rotation de la Terre. En effet, comme le gyroscope est fixe dans le référentiel de Copernic, la Terre va tourner autour de son axe Δ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Par conséquent, un observateur fixe dans le référentiel terrestre va voir l'axe du gyroscope précesser autour de l'axe de rotation de la terre avec une vitesse angulaire $-\vec{\Omega}$.

2) Gyrocompas:

Un gyrocompas est un gyroscope constitué selon le type Cardan. Pour comprendre son fonctionnement, on doit prendre en compte les frottements du support sur le gyroscope. Supposons le gyroscope fixe dans le référentiel de Copernic et son support lié à la terre. Celui-ci tourne avec une vitesse de rotation dirigée selon l'axe de rotation de la terre, et la liaison va donc imposer par frottement un couple en O dirigé selon la même direction. Le gyroscope va donc avoir tendance à s'aligner selon cette direction : il va donc indiquer la direction du vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel de Copernic.

Dans un premier temps, on détermine la direction du méridien: on impose à l'axe Δ du gyroscope d'être horizontal en bloquant l'anneau A_{int} horizontal. L'axe, qui va tendre à s'aligner avec $\vec{\Omega}$, va s'immobiliser alors en Δ_m dans le plan méridien formé par $\vec{\Omega}$ et la verticale du lieu.

Ensuite on lui impose de rester dans un plan vertical en bloquant cette fois A_{ext}. L'axe va alors s'orienter selon $\vec{\Omega}$, et on en déduit alors la latitude du milieu par l'angle Δ_m, Ω. Le gyrocompas est un instrument précieux pour l'orientation, notamment dans les véhicules dont la masse métallique exclut l'usage d'une boussole magnétique.

3) Précession des équinoxes:

On sait que le Soleil semble être dans le plan équatorial terrestre deux fois dans l'année, c'est-à-dire au moment des équinoxes. Cependant, on observe une lente variation de la position apparente du soleil à chaque printemps, phénomène appelé *précession des équinoxes*.

Ce phénomène est attribué à la non sphéricité de la Terre, qui ressemble en fait à une sphère renflée à l'équateur. On peut établir alors que les autres astres exercent un moment gravitationnel qui a pour expression $\vec{M}_T = -A\sin(2\theta_0)\vec{e}_u$, avec $A = \frac{3}{4}G(I_3 - I_1)\left(\frac{M_S}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3}\right)$. On voit bien que si la Terre était sphérique, on aurait $I_3 = I_1$ et $A = 0$.cf. Pérez p366.

Dans le référentiel géocentrique, la Terre peut être alors considérés comme un gyroscope puisque sa vitesse de rotation propre est grande devant sa vitesse de précession que nous allons chercher à déterminer. Ceci est confirmé par le fait que θ_0 est pratiquement constant.

La vitesse de précession est alors donnée par $\overset{o}{\psi} = \frac{-A\sin(2\theta_0)}{\sin\theta . I_3 \Omega}$. L'application numérique donne, avec $\theta_0 = 23{,}5°$ et $\frac{I_3 - I_1}{I_3} = \frac{1}{306}$, $\frac{2\pi}{\overset{o}{\psi}} \approx 259$ siècles. Ceci signifie en particulier que les saisons réelles sont en avance de 14 jours par rapport à un calendrier figé depuis 1000 ans et qui ne prend en compte que la valeur non entière de la rotation de la Terre autour du Soleil en jour par les années bisextiles.