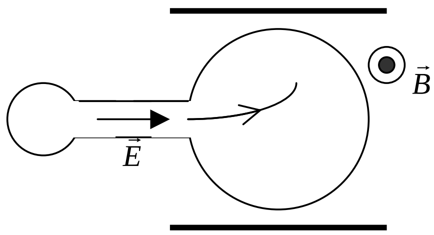
Biblio:
Perez relat
Garing Magnétisme

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique indépendant du temps

Intro expérimentale:

Dispositif:



On observe une déviation du fasceau d'électrons lorsqu'il arrive avec une vitesse $\vec{v}$ dans le champ $\vec{B}$. Par ailleurs:

- Lorsqu'on augmente la valeur de $\vec{B}$, la déviation est plus importante
- Lorsqu'on augmente la valeur de $\vec{E}$, et donc celle de la vitesse d'émergence, la déviation est elle aussi modifiée.
- Il existe une direction privilégiée pour laquelle la force est nulle

Enfin, pour une valeur suffisamment grande de $\vec{B}$n l'électron décrit des cercles à vitesse constante. On en déduit que la force qui s'exerce sur est:

- proportionnelle à v et à B
- normale à v
- enfin une équation au dimension nous permet de voir que $[v.B]=\dfrac{F}{Q}$

On en déduit que la forme la plus simple pour décrire la force exercée par $\vec{B}$ sur une charge q vaut $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$, ce qui constitue d'ailleurs la définition du champ magnétique.

On voit donc que cette force ne travaille pas, car elle est toujours orthogonale à la vitesse.

Nous allons ici étudier comment se comporte un électron placé dans un champ $\vec{B}$

B) Etude du mouvement:

1) Cas classique

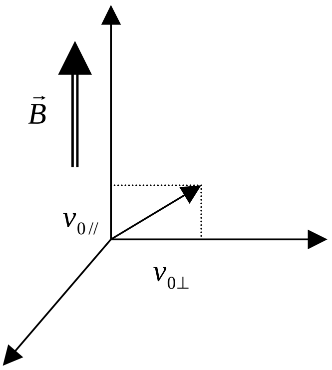
On écrit le principe fondamental de la dynamique pour l'électron:

$m\vec{a}=m\vec{g}+q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Or on a, pour un électron : $mg\approx 10^{-30}N$ et $qvB=10^{-20}N$ donc on peut, même au faibles vitesses, négliger le poids de l'électron devant la force de Lorentz.

On a donc $m\vec{a}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Si on écrit que la particule, initialement en O, a pour vitesse initiale:
$v_{0\perp} = v_0 \sin\theta_0$ et $v_{0//} = v_0 \cos\theta_0$



Si on multiplie scalairement la relation fondamentale de la dynamique:

- par $\vec{v}$, on a $\frac{dv^2}{dt} = 0$ soit $v = \|\vec{v}\| = cste = v_0$, ce qui est normal vu que la force de Lorentz ne travaille pas
- par $\vec{B}$, on a $\frac{d\vec{v}.\vec{b}}{dt} = 0$ soit $\vec{v}.\vec{B} = v_{//}.B = cste$, et comme $\vec{B}$ est constant, il vient que $v_{//} = cste = v_{0//}$ d'où un mouvement translation rectiligne uniforme parallèlement à $\vec{B}$.

On en déduit également $v_\perp = \sqrt{v^2 - v_{//}^2} = cste = v_{0\perp}$

Si ensuite on décompose $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_\perp$, on tire que:

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}$ soit $\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = -\frac{q\vec{B}}{m} \wedge \vec{v}_\perp$ du type $\left(\frac{d\vec{v}_\perp}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}_\perp}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_\perp$

Ce ci s'interprète de la manière suivante: dans le repère R' tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{R'/R} = -\frac{q\vec{B}}{m}$, le vecteur $\vec{v}_\perp$ apparaît comme constant. On en déduit que dans le repère *R*, il y a précession de $\vec{v}_\perp$ autour de $\vec{B}$ à la pulsation $\omega_c = |q|\frac{B}{m}$, pulsation cyclotron, ce qui correspond à un mouvement circulaire plan de rayon donné par $\frac{mv_{0\perp}^2}{R} = |q|v_{0\perp}B$ soit $R = \frac{mv_{0\perp}}{|q|B} = \frac{p_{0\perp}}{|q|B}$

Etant donné le signe du vecteur rotation, on voit que la mouvement se fait dans le sens rétrograde si *q* est positif, et dans le sens direct si *q* est négatif.

2) Cas relativiste:

Dans le cas de grandes vitesses, la relation fondamentale de la dynamique à pour expression, dans le cadre de la relativité restreinte:

$\frac{d(\gamma.m\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, où on néglige toujours le poids et où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Comme la force magnétique ne travaille pas, on a toujours $v = cste$ et donc $\gamma = cste$, ce qui nous permet d'écrire:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q\vec{B}}{m\gamma} \wedge \vec{v}$$

On retrouve donc les mêmes résultats qu'en mécanique newtonienne, mais ici la pulsation cyclotron dépend de la valeur de v par le facteur γ. Le mouvement est donc une hélice de rayon $R = \frac{\gamma.mv_{0\perp}}{|q|B} = \frac{p_{0\perp}}{|q|B}$ expression similaire à celle obtenue en mécanique newtonienne, mais où la définition de la quantité de mouvement est différente.

C) Applications:

1) Accélérateurs de particules:

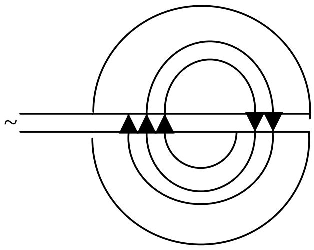
Il peut sembler au premier abord étonnant que l'on utilise le champ magnétique dans un accélérateur de particule étant donné que la force magnétique ne travaille pas et donc n'accélère (au sens de l'augmentation du module de la vitesse) en aucun cas les particules.

En fait c'est un champ électrique qui accélère les particules, le champ magnétique ne servant "qu'à" dévier les particules pour les amener dans les régions où elles seront accélérées.

Plusieurs types d'accélérateurs existent:

a) Le cyclotron et le synchrocyclotron:

Un cyclotron est constitué comme suit:



A chaque fois qu'une particule passe par la zone intermédiaire entre les deux D, elle doit être accélérée. Par conséquent, à le champ sinusoïdal de fréquence ν, doit changer de sens à chaque demi révolution, ce que l'on traduit par:

$$\nu = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi\gamma m}.$$

On voit alors qu'en relativité, la fréquence dépend de la vitesse v par l'intermédiaire de γ. La synchronisation est donc difficile à obtenir. Ainsi pendant longtemps on s'est limité à des petits cyclotrons et à des particules lourdes.

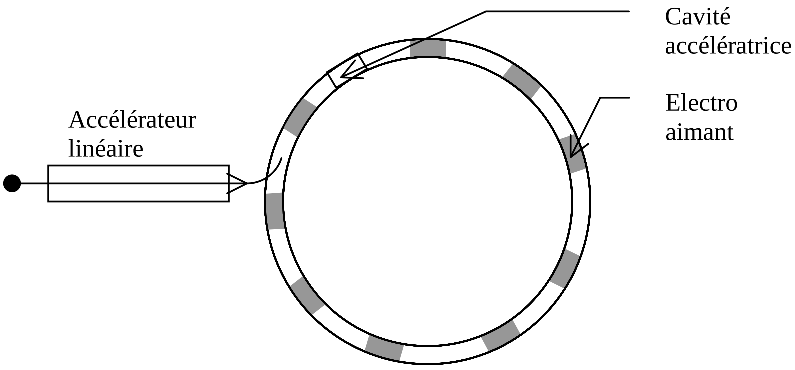
Par exemple dans un cyclotron de 1m de diamètre et de 1,5T de champ on peut atteindre des énergie cinétiques pour des protons de l'ordre de 20 Mev .

Cette barrière à été franchie avec des synchrocyclotrons dans lesquels la fréquence du champ électrique diminue lorsque la vitesse augmente. On a pu alors atteindre des énergies de 700 Mev.

Cependant, il faut alors que le champ magnétique soit très intense, ce qui est problématique car il doit être en même temps étendu (il faut qu'il couvre les deux D). D'où l'idée du synchrotron.

b) Le synchrotron

Il est constitué d'un enceinte torique le long de laquelle des petits aimants disposés en anneaux assurent le guidage circulaire.



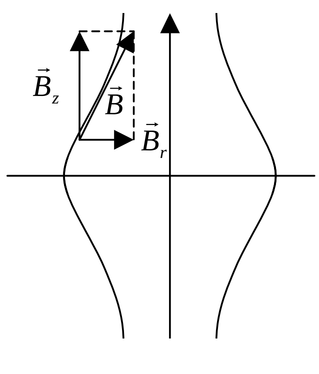
Lorsque la vitesse augmente, on augmente le champ magnétique pour maintenir le rayon constant, conformément à la relation:

$$B = \frac{\gamma.mv}{qR} = \frac{mc}{qR}\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Et on fait en sorte que la fréquence du champ électrique vaille $\nu = \dfrac{v}{2\pi R}$.

2) Confinement magnétique:

On considère une région de l'espace dans laquelle règne un champ magnétique non uniforme de symétrie cylindrique:



Pour r petit, on a: $B_z(r,z) = B_z(0,z) = B_z(z)$ et que $B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_z}{dz}$ au premier ordre en r.

Initialement, la particule est dans le plan $z = 0$ avec la vitesse:

$$\vec{v}_{0\perp} = -\frac{r_0 q B_z(0)}{m}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_{0//} = v_0 > 0$$

Qui sont les conditions obtenues dans le cas classique pour le mouvement dans un champ uniforme.

On considère alors que le rayon r varie peu sur un tour. Le PFD s'écrit alors:

$$m\left|\begin{array}{l} -v_\perp^2 \\ dv_\perp / dt \\ dv_{//} / dt \end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l} 0 \\ v_\perp \\ v// \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} B_r \\ 0 \\ B_z \end{array}\right.$$

D'où on tire que:

$$\begin{cases} mv_{\perp} = -qB_z r \quad (1) \\ m\dfrac{dv\perp}{dt} = dv_{//} B_r \ (2) \\ m\dfrac{dv_{//}}{dt} = -qv_{\perp} B_r \ (3) \end{cases}$$

Avec $v_{//} = \dfrac{dz}{dt}$ et $B_r = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_z}{dz}$, l'équation (2) multipliée par $\dfrac{2v_{\perp}}{m}$ s'écrit en y substituant $\dfrac{q}{m}$ par $-\dfrac{v_{\perp}}{B_z r}$ (équation (1)):

$2v_{\perp}\dfrac{dv_{\perp}}{dt} = 2\left(-\dfrac{v_{\perp}}{B_z r}\right)\dfrac{dz}{dt} v_{\perp}\left(-\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_z}{dz}\right)$ soit $\dfrac{dv_{\perp}^2}{dt} = \dfrac{v_{\perp}^2}{B_z}\dfrac{dB_z}{dt}$, ce qui s'écrit également $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_{\perp}^2}{B_z}\right)^2 = cste$ et donc

$$\boxed{\frac{v_{\perp}^2(z)}{B_z(z)} = cste} \quad (4)$$

Comme d'après (1), $v_{\perp} = -\dfrac{qB_z r}{m}$, on a $\pi r^2 B_z = cste$, et donc le flux du champ magnétique au travers des trajectoires circulaires successives est constant, et comme $\vec{B}$ est à flux conservatif, ces cercles se situent toujours sur un même tube de champ.

L'équation (3) nous donne l'égalité bien connue $v^2 = cste$

On a donc: $\dfrac{v_{\perp}^2}{B_z} = \dfrac{v_{0\perp}^2}{B_z(0)}$ et donc $v_{//}^2 = v^2 - v_{\perp}^2 = \dfrac{2E_c}{m} - v_{0\perp}^2\dfrac{B_z(z)}{B_z(0)}$

La condition naturelle $v_{//}^2 > 0$ mène donc à $B_z(z) \leq B_{z\max} = \dfrac{2E_c}{mv_{0\perp}^2}$, soit $B_{z\max} = \dfrac{B_z(0)}{\sin^2\theta_0}$

Les points P^+ et P^- définis par $B_z = B_{z\max}$ peuvent être considérés comme des points d'arrêt où la particule rebrousse chemin.

Localement les paramètres du mouvement hélicoïdal sont:

- la pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{qB_z(z)}{m}$
- la pas de l'hélice $p(z) = \dfrac{2\pi mv_{//}(z)}{qB_z(z)} \xrightarrow[M \to P]{} 0$
- le rayon du cercle $r(z) = \dfrac{mv_{\perp}(z)}{qB_z(z)} \xrightarrow[M \to P]{} r_0 \sin\theta_0$