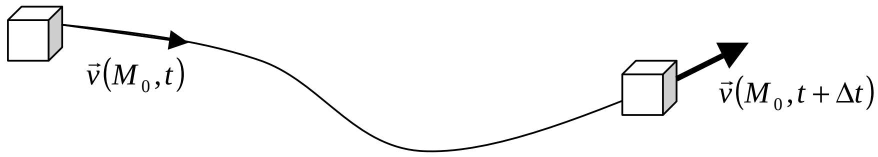
LP 10 Description cinématique d'un fluide en mouvement
Exemples (PC)

A) Description du mouvement:

1) Vecteur vitesse:

a) Description lagrangienne:

A un instant t_0, on a une particule fluide dont on suit le mouvement au cours du temps.



b) Description eulerienne:

On considère le champ de vecteur $\vec{v}(M,t)$, plus précisément les lignes de courants, lignes tangentes en tout point M à $\vec{v}(M,t)$.

Ces lignes de courant sont définies par:

$$\boxed{\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}}$$

2) Ecoulement stationnaire:

Un écoulement est stationnaire lorsque la vitesse eulerienne ne dépend pas explicitement du temps. Il faut bien prendre en compte la vitesse eulerienne car en formalisme lagrangien, la vitesse dépend explicitement du temps, sauf dans le cas d'un écoulement uniforme. Par ailleurs, la stationnarité d'un écoulement n'implique absolument pas l'uniformité de l'écoulement. En effet, sur une trajectoire, $\vec{v}$ peut tout à fait varier.

Physiquement, la notion d'écoulement stationnaire signifie que, si on se place en formalisme eulerien, c'est-à-dire si on regarde un point géométrique du fluide, alors les vitesses des particules qui passeront par ce point seront les mêmes à tout instant.

Ce cas est important car c'est le seul où les lignes de courant (eulériennes) et les trajectoires (lagrangiennes) sont les mêmes.

3) Premier exemple: écoulement dans un dièdre droit.

Considérons un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses dans un référentiel muni d'un repère $(O;x;y;z)$, dans la région $x>0, y>0$ vaut:

$v(\vec{r},t) = -kx.\vec{e}_x + ky.\vec{e}_y$

Cet écoulement est stationnaire car $\vec{v}$ ne dépend pas explicitement du temps $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right)$.

Les trajectoires sont obtenues en formalisme lagrangien (en effet cette notion n'a pas de sens en formalisme eulerien) par:

$$\frac{dX}{dt} = -kX(t), \text{ soit } X = X_0 e^{-kt}$$

$$\frac{dY}{dt} = kY(t), \text{ soit } Y = Y_0 e^{kt}$$

Donc $Y = \dfrac{X_0 Y_0}{X}$: on obtient une famille d'hyperboles

Les lignes de courant sont obtenues par

$\dfrac{dx}{-kx} = \dfrac{dy}{ky}$ soit $-\ln x = \ln y$ et donc $xy = cste$. On retrouve bien la même famille de courbes: Hprépa méca fluide p.21.

En effet, si l'on considère à présent l'écoulement non stationnaire:

$\vec{v} = -kx.\vec{e}_x + ky.\vec{e}_y + a\omega.\cos\omega.t$, les trajectoires sont données par:

$$X = X_0 e^{-kt}$$

$$Y = Y_0 e^{-kt}$$

$$Z = Z_0 + a \sin \omega.t$$

et les lignes de courant sont données par:

$$\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{ky} = \frac{dz}{a\omega.\cos\omega.t}$$

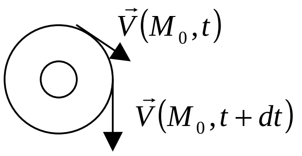
qui donne par intégration : $xy = cste$ et $z = -\dfrac{a\omega \cos\omega.t_0}{k} \ln x + cste$

Il n'y a donc plus d'identité entre lignes de courant et trajectoires. Ceci est très important car lorsqu'on veut visualiser un écoulement, on injecte dans le fluide des marqueurs dont on visualise *la trajectoire*. Il faut donc que l'écoulement soit stationnaire pour que cette visualisation donne l'allure des *lignes de courant*.

4) Dérivation particulaire; accélération:

Si on considère un écoulement en rotation solide:

$\vec{v}(M,t) = \rho\Omega.\vec{e}_\theta$ et que l'on calcule l'accélération d'une particule en formalisme lagrangien, on a:

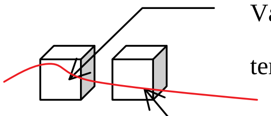


Ici l'accélération vaut: $\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$, c'est-à-dire, selon le résultat classique de la rotation solide $\vec{A} = -\rho\Omega^2\vec{e}_\rho$.

Par contre en formalisme eulerien, si on calcule $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$ car l'écoulement est stationnaire. Quelle est alors la "bonne" accélération.

Si on reprend les bases du formalisme eulérien, on s'aperçoit que l'accélération, au niveau de son interprétation physique, doit non seulement prendre en compte les variations temporelles locales du champ de vitesse mais également les variations de vitesse qu'une particule "voit" lorsqu'elle suit sa trajectoire, comme l'indique le dessin suivant:

On définit alors l'accélération par:



$$\vec{a} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \vec{v}(x,y,z,t)}{dt}$$

et donc

$$a_x = \frac{1}{dt}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz + \frac{\partial v_x}{\partial t}dt\right]$$

soit en regroupant: $\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}}$

On définit alors la dérivée particulaire $\frac{D.}{Dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)$ et $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$ en formalisme eulérien.

Le premier terme caractérise la non stationnarité du champ des vitesses, le second sa non uniformité. On appelle le second terme la dérivée convective.

Pour le cas de la rotation solide, on a alors $\vec{a} = \left(v_\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)v_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{v_\theta^2}{\rho}\vec{e}_r = -\rho.\Omega^2\vec{e}_r$

B) Caractéristiques du mouvement:

1) Conservation de la masse:

Considérons un volume fixe dit *de contrôle* de l'espace occupé par le fluide, délimité par une surface fermée fixe, ce qui définit en tout point une normale $\vec{N}$ orientée vers l'extérieur.

La masse de fluide contenue à un instant *t* dans ce volume vaut:

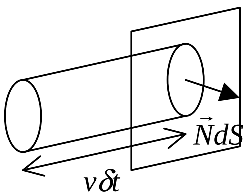
$m(t) = \iiint_V \rho(M,t)d\tau$.

Par ailleurs, du fluide entre et sort continuellement de ce volume. Pour un volume élémentaire $d\tau$, contenant la masse $dm = \rho(M,t)d\tau$, la variation $\delta(dm)$ de la masse pendant le temps δt est telle que .

La masse totale du fluide située dans le volume *V* a donc variée pendant *dt* de:

$\delta m = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \delta t$

Considérons à présent une surface élémentaire *dS*. La masse qui passe à travers cette surface pendant δt vaut: $\rho\vec{v}.\vec{N}dS\delta t$



On définit alors le débit massique par $D_m = \oiint_S \rho\vec{v}.\vec{N}.dS$, et le débit volumique par $D_v = \oiint_S \vec{v}.\vec{N}.dS$.

Et la masse entrant dans le volume vaut alors $dm = -D_m\delta t$.

Nous obtenons donc l'expression intégrale de la conservation de la masse:

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\pi + \oiint_S \rho \vec{v}.\vec{N}.dS = 0}$$

En utilisant alors le théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient que $\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + div(\rho \vec{v}).d\tau = 0$ et donc, puisque le volume peut être choisi n'importe comment:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0}$$

Remarque : la définition même du débit massique nous permet de tirer les conditions aux limites d'un obstacle. En effet, si on considère la surface de l'obstacle, le débit massique y doit être nul puisqu'il ne peut y avoir de fluide dans l'obstacle.

On a donc $\vec{v}.\vec{N} = 0$, d'où on tire que *la vitesse d'un fluide au contact d'un obstacle est nécessairement tangente à la surface de cet obstacle.*

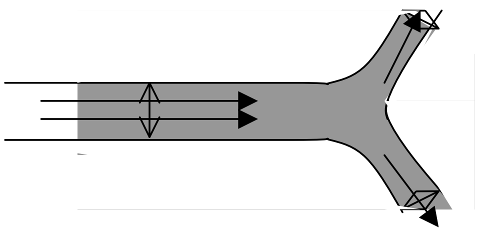
2) Ecoulement incompressible, conservation du débit:

Cette équation de conservation de la masse peut également s'écrire:
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad}\rho + \rho.div\vec{v} = 0$, soit $\frac{D\rho}{Dt} + div\vec{v} = 0$

Autrement dit, si $div\vec{v} = 0$, on aura $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, ce qui implique que l'écoulement est incompressible. En effet, ceci signifie qu'au voisinage d'un particule fluide, lorsque l'on suit sa trajectoire, il n'y a pas de variation de la masse volumique.

Par contre, ceci n'indique absolument pas que le fluide est incompressible. En effet autour d'une autre particule de fluide on peut avoir la même relation mais pas forcément la même masse volumique. C'est la raison pour laquelle on parle uniquement *d'écoulement incompressible*.

Par ailleurs, pour un écoulement incompressible, la relation $div(\vec{v}) = 0$ implique que, pour toute surface fermée, $\oiint_S \vec{v}.\vec{N}dS = 0$ et donc que le débit volumique se conserve. Pour un fluide incompressible, $\rho = cste$ et le débit massique se conserve également.



Exemple:

On a la relation de conservation du débit:
$Sv = S_1 v_1 + S_2 v_2$, en utilisant une surface de contrôle s'appuyant sur le conduit et traversant normalement les zones d'écoulement.

3) Vorticité: rotation d'un fluide:

Reprenons l'exemple de la rotation solide, qui modélise ce qu'il se passe à l'intérieur d'une tornade. On a un champ de vitesse caractérisé par $\vec{v} = \rho.\Omega.\vec{e}_\theta$

Si on calcule $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \Omega\rho^2\overrightarrow{rot}\frac{\vec{e}_\theta}{r} + \Omega\left(\overrightarrow{grad}\left(r^2\right)\right)\wedge\frac{\vec{e}_\theta}{r} = 2\Omega\vec{e}_z$

De manière générale, on définit un *vecteur tourbillon* $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v})$. Si en un point du fluide ce vecteur est non nul, alors *localement*, les particules fluides ont un mouvement de rotation solide. Ceci nous renseigne donc sur l'existence locale de tourbillons, d'où son nom.

Exemple:

On modélise une tornade par le champ de vitesse:

$\vec{v} = \Omega r\vec{e}_\theta \quad r < a$

$\vec{v} = \Omega\frac{a^2}{r} \quad r > a$

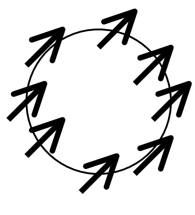
Ce champ, de la forme $f(r)\vec{e}_\theta$ est partout à divergence nulle : l'écoulement est donc incompressible.

Par contre, pour $r < a$, on a $\overrightarrow{rot}\vec{v} = 2\Omega\vec{e}_z$ et pour $r > a$, on a $\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$: il ne faut pas confondre rotation globale et vecteur rotation, qui traduit une rotation locale.

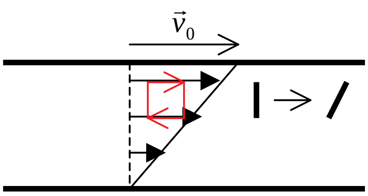
On peut préciser l'interprétation physique de la vorticité sur cet exemple:

- à l'intérieur un petit bâton placé sur le fluide va tourner:

- à l'extérieur on peut montrer qu'il ne va pas tourner sur lui même:



Si on considère enfin un écoulement bidimensionnel de cisaillement:



Le champ des vitesses est donné par $\vec{v} = v_0\frac{y}{L}\vec{e}_x$

Et la vorticité de ce champ vaut $\vec{\Omega} = \frac{\overrightarrow{rot}\vec{v}}{2} = -\frac{v_0}{2L}\vec{e}_z$, ce qui indique le fait qu'un petit bâton placé dans un tel écoulement aura tendance à pivoter sur lui-même dans le sens horaire.