LP 11 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide : validité
Equation d'Euler. Théorèmes de Bernoulli
Applications

Intro: Dans les leçons précédentes, nous nous sommes dotés du matériel nécessaire pour décrire un fluide en mouvement, indépendamment des actions subies, c'est-à-dire des causes de ce mouvement.

Nous allons donc ici nous intéresser à la dynamique des fluides, dans le modèles des fluides parfaits, hypothèse que nous allons dans un premier temps préciser. Ensuite nous expliciterons l'expression générale du principe fondamental de la dynamique pour un fluide parfait, puis nous en donnerons une étude simplifiée dans des cas particuliers.

Enfin nous verrons quelques applications.

A) Actions dans un fluide. Modèle du fluide parfait:

1) Actions surfaciques:

Considérons une surface fermée *S* fictive. Les particules extérieures à *S* exercent des actions sur les particules situées à l'intérieur de *S*.

Si on considère un élément de surface *dS*, la résultante $d\vec{F}$ de ces actions à en général une composante normale et une composante tangentielle telles que $d\vec{F} = d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$.

La composante normale est appelée *force de pression*. Elle est proportionnelle à l'élément de surface considéré et est dirigée de l'extérieur vers l'intérieur. La force de pression élémentaire s'écrit donc: $d\vec{F}_N = -P(M,t)\vec{N}.dS$

La composante tangentielle est appelée *force de viscosité*. Comme son nom l'indique, elle est caractéristique des fluides réels visqueux. Son expression est donnée par:

$d\vec{F}_{T\,ext\to\mathrm{int}} = \eta\left(\overrightarrow{grad}(v).\vec{N}\right)dS.\vec{T}$ si $\vec{v} = v\vec{T}$

Il existe par ailleurs une autre sorte d'actions de surface, appelées *forces de tension superficielle*. Elles ont pour origine le fait qu'à l'intérieur du fluide, les interactions entre particules sont en moyenne nulles en raison de l'agitation thermique. Par contre, à la surface, elles sont non nulles car il y a brisure de l'isotropie de l'espace et apparition d'une direction privilégiée (par exemple la normale à la surface). Pour amener une particule à la surface, il faut donc dépenser de l'énergie, et ceci d'autant plus qu'il y a de particules. Cette énergie, proportionnelle à la surface, s'écrit donc $\delta W = AdS$.

Cette force de tension superficielle est responsable d'une discontinuité de pression de part et d'autre d'une interface de fluide donnée par $P_{ext} - P_{\mathrm{int}} = -\frac{2A}{R}$, où R est le rayon de courbure local. Nous négligerons par la suite cette tension superficielle, tout en gardant à l'esprit que ceci n'est valable que ceci n'est justifié que si les systèmes ne sont pas de petite dimension.

Dans la suite, nous considérerons donc que *la pression est une fonction continue des coordonnées spatiales*.

2) Force volumiques, forces massiques:

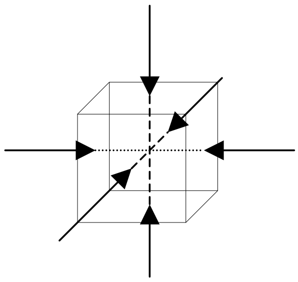
Considérons à présent un élément de fluide de volume $d\tau$. Celui-ci est soumis à des forces volumiques, comme par exemple la pesanteur. Ces action sont ressenties par toutes les particules du fluide et proportionnelles au nombre de particules et donc au volume élémentaire. On aura ainsi $d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau$.

On définit de la même manière une représentation massique par la relation $d\vec{f} = \vec{f}_m \rho . d\tau$.

Pour les action de pesanteur, on aura $\vec{f}_v = \rho\vec{g}$ et $\vec{f}_m = \vec{g}$.

Par ailleurs, on peut définir un équivalent volumique pour les action surfaciques vues au paragraphe précédent.

En effet, calculons la résultante des forces de pression dur un élément de volume $d\tau = dxdydz$.



La composante de cette force sur l'axe Ox vaut $dF_x = dydz.\left[P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$

Avec le même raisonnement, on obtient que:

$$d\vec{F} = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y} d\tau\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z} d\tau\vec{e}_z$$

Soit $d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P . d\tau = -\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho} dm$

On a donc bien un équivalent volumique et un équivalent massique des forces de presions.

On peut effectuer un raisonnement semblable et aboutir au fait que les forces de viscosité s'écrivent : $d\vec{F} = \eta\Delta\vec{v}d\tau = \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}.dm$.

3) Modèle du fluide parfait.

Dans le modèle du fluide parfait, on néglige d'une part les tensions superficielles, d'autre part les forces de viscosité. Cette approximation est intuitivement valable pour les gaz, pour des fluides non visqueux comme l'eau. Par contre, on voit que la viscosité va intervenir très fortement dans les écoulements pour des fluides comme de l'huile ou par exemple, du lait concentré.

B) Expressions du PFD. Equation d'Euler. Théorèmes de Bernouilli.

1) Equation d'Euler:

La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à une particule de fluide de masse *dm*, dont nous suivons le mouvement s'écrit:

$$dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}$$

En utilisant alors les représentations massiques des actions, on peut écrire:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_{m,totale}$$

On peut ensuite expliciter les diverses expressions de la dérivée particulaire et en distinguant les forces massiques "vraies" et l'équivalent massique dû aux forces de pression, on obtient:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}\\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}\\ &\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad}P\end{aligned}}$$

où $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v}$

Ces relations sont les différentes formes de *l'équation d'Euler*.

2) Relations de Bernoulli:

Prenons un élément de longueur $\vec{dl}$ quelconque. En utilisant la deuxième forme de l'équation d'Euler, on obtient:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.\vec{dl} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right).\vec{dl} + \left(2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right).\vec{dl} = \left(\vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}\right).\vec{dl}$$

Si par ailleurs on suppose que les forces massiques dérivent d'une énergie potentielle massique e_{Pm} telle que $\vec{f}_m = -\overrightarrow{grad}(e_{Pm})$, on a:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_{Pm}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} + \frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}\right].\vec{dl} = 0$$

Si enfin on fait l'hypothèse que le fluide est soit incompressible, soit barotrope, c'est-à-dire qu'on a une relation thermodynamique du genre $\rho = g(P)$, alors cette expression devient:

→pour un fluide incompressible

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \frac{P}{\rho}\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right].\vec{dl} = 0$$

→pour un fluide barotrope, où on a alors une fonction φ telle que $\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho} = \overrightarrow{grad}\varphi$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2} + e_{Pm} + \varphi(P)\right) + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right].\vec{dl} = 0$$

Pour poursuivre il faut a présent ajouter une hypothèse supplémentaire:

a) Si l'écoulement est stationnaire:

Le premier terme disparaît alors et, si l'on intègre cette relation le long d'une ligne de courant, on a $\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right).\vec{dl} = 0$ par définition d'une ligne de courant.

On obtient donc:
→pour un écoulement barotrope:
$$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\varphi(P)=cste$$ le long d'une ligne de courant
→pour un écoulement incompressible:
$$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\frac{P}{\rho}=cste$$ le long d'une ligne de courant

b) Ecoulement irrotationnel.

Si l'écoulement est irrotationnel, d'une part le troisième terme est nul, et d'autre par on peur écrire, comme $\overrightarrow{rot}\vec{v}=0$, $\vec{v}=\overrightarrow{grad}\phi$. On a donc:
→pour un écoulement barotrope:
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\varphi(P)=cste$$ en tout point du fluide
→pour un écoulement incompressible:
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\frac{P}{\rho}=cste$$ en tout point du fluide

On peut récapituler tous ces résultats :

Différentes formes de l'équation de Bernoulli	Ecoulement barotrope $\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}=\overrightarrow{grad}\varphi$	Ecoulement incompressible $\frac{\overrightarrow{grad}P}{\rho}=\overrightarrow{grad}\frac{P}{\rho}$
Ecoulement stationnaire	$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\varphi(P)=cste$ le long d'une ligne de courant	$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\frac{P}{\rho}=cste$ le long d'une ligne de courant
Ecoulement irrotationnel $\vec{v}=\overrightarrow{grad}\phi$	$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\varphi(P)=cste$ en tout point du fluide	$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\frac{P}{\rho}=cste$ en tout point du fluide
Ecoulement irrotationnel et stationnaire	$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\varphi(P)=cste$ en tout point du fluide	$\frac{v^2}{2}+e_{Pm}+\frac{P}{\rho}=cste$ en tout point du fluide

3) Conditions approchées d'application de la relation de Bernoulli:

Il est évident que la dernière relation est la plus simple à utiliser. En effet, elle ne nécessite pas la détermination de la fonction $\varphi(P)$.

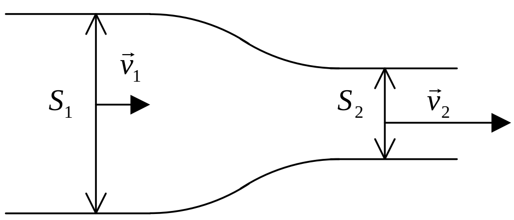
Supposons que, dans les conditions de l'expérience, le fluide soit barotrope, c'est-à-dire qu'il existe une relation de compressibilité $\chi = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)$. Fréquemment, l'écoulement est isentropique, c'est-à-dire que $\chi = \chi_S$.

Supposons alors que les variations de ρ soient négligeables. La vitesse varie de 0 à $v_{\max}$ et P de $P_{\min}$ à $P_{\max}$, avec d'après la relation de Bernoulli $P_{\max} = P_{\min} + \rho\dfrac{v_{\max}^2}{2}$. On a alors $\Delta\rho = \chi.\rho.\Delta P$. Cette variation de masse volumique doit être petite devant ρ, ce qui s'exprime par $v_{\max}^2 << 2\dfrac{1}{c\rho} = c_{son}$.

Il est donc possible d'appliquer la relation de Bernoulli pour un écoulement incompressible à tout écoulement dans la mesure où la vitesse d'écoulement reste très inférieure à la célérité du son dans le fluide.

C) Applications:

1) Effet Venturi:



Pour un écoulement stationnaire homogène incompressible, la conservation du débit impose : $S_1 v_1 = S_2 v_2$, et la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant impose $\dfrac{P_1}{\rho} + \dfrac{v_1^2}{2} = \dfrac{P_2}{\rho} + \dfrac{v_2^2}{2}$.

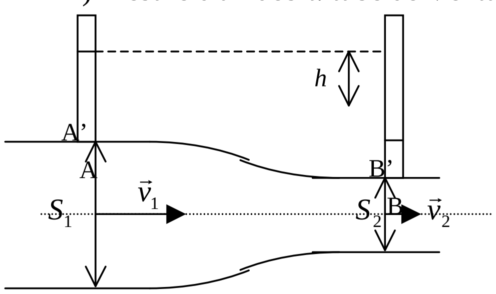
Si $S_1 > S_2$, alors $v_1 < v_2$ et $P_1 > P_2$.

Les zones de rétrécissement sont des zones de grande vitesse et donc des zones de faible pression.

Exemples:
- Trompe à eau
- Froid lorsqu'on est mouillé dans le vent.

Montrer:
- feuille sous les doigts
- Aspiration d'une balle de ping-pong

2) Mesure d'un débit: tube de Venturi:



D'après Bernoulli, on peut écrire:

$$P_A - P_B = \rho\frac{v_A^2}{2}\left[\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1\right]$$

La section des tubes doit être très petite devant la section de l'écoulement pour ne perturber que très peu celui-ci. On a, d'après la relation de la statique des fluides:

$P_{A'} - P_0 = \rho.g(z_1 - z_{A'})$ $P_{B'} - P_0 = \rho.g(z_2 - z_{B'})$

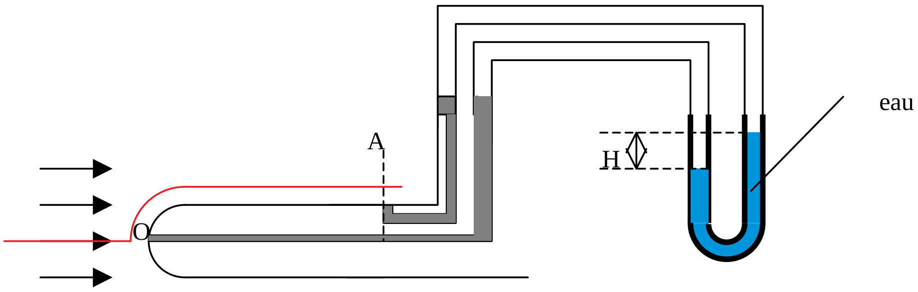
Sur les sections S_A et S_B, l'écoulement est unidirectionnel et uniforme, et donc à rotationnel nul. On peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre *A* et *A*':

$P_A - P_{A'} = \rho.g(z_{A'} - z_A)$ $P_B - P_{B'} = \rho.g(z_{B'} - z_B)$. On a donc:

$P_A - P_B = \rho.gh$ et donc, en identifiant les deux expressions de $P_A - P_B$:

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1}}}$$

3) Mesure d'une pression: tube de Prandtl:

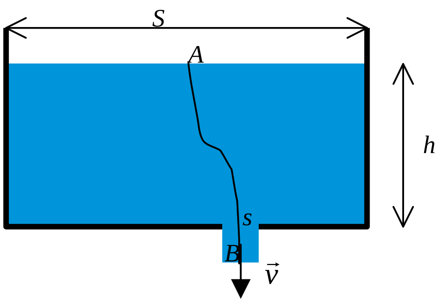


La vitesse en O, point d'arrêt, est nulle et donc la pression vaut $P_\infty = P_0$ et la pression en A vaut P_A.

On a alors directement $P_0 - P_A = \rho_{eau} gH = \rho_{air} \frac{v^2}{2}$. Ces résultat sont valables dans l'air tant que $v << c_{son}$.

4) Formule de Torricelli:

On s'intéresse pour finir à un réservoir muni d'un trou, et on veut déterminer la vitesse à laquelle sort le fluide passant par ce trou:



La relation de Bernoulli appliquée à une ligne de courant donne, si le fluide est incompressible (comme de l'eau par exemple):

$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = \rho g z_B + P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$. Or la pression en *A* et en *B* vaut P_0 et la conservation du débit implique que $v_A = \frac{s}{S} v_B$.

On a donc: $\frac{1}{2}\rho v^2\left(1-\frac{s}{S}\right)=\rho gh$ d'où $v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{s}{S}}}$. Si on suppose par ailleurs que $S >> s$, on a la formule de Torricelli $\boxed{v=\sqrt{2gh}}$. En application pratique, on voit que la vitesse à la sortie d'une douche ne dépend que de la différence de hauteur entre le niveau du château d'eau et celui de la douche, et donc que le débit augmente linéairement avec la surface de l'orifice (réglable à l'aide du robinet).