

LP 22 Rayonnement d'équilibre thermique.
Corps noir. Applications.

Intro : Cf. Bruhat

A) Corps noir : définitions et propriétés

1) Puissance rayonnée, luminance énergétique:

L'émission totale d'une source est mesurée par la *puissance rayonnée*, c'est-à-dire par la quantité W d'énergie qu'elle rayonne, par unité de temps, à travers l'espace qui l'entoure. On définit alors la partie de l'énergie transportée dans un intervalle spectral $\lambda, \lambda + d\lambda$ par:

$$W = \int_0^\infty W_\lambda d\lambda.$$

Au lieu de considérer les longueurs d'ondes, on peut considérer les fréquences, ce qui dans le vide revient au même, et on définit alors $W_\nu = \frac{dW}{d\nu}$, les deux grandeurs étant reliées par,

puisque $\lambda = c/\nu$, $W_\lambda = \frac{\nu^2}{c} W_\nu$, $W_\nu = \frac{\lambda^2}{c} W_\lambda$.

Considérons alors deux éléments de surface ds et ds' . Nous supposons que ds est situé juste sur la surface du corps émetteur. La puissance reçue par la surface ds' va alors être contenue dans et donc proportionnelle à l'angle solide $d\omega$ sous lequel la surface ds voit la surface ds' . Par ailleurs, il est évident que l'énergie rayonnée reçue par ds' va être également proportionnelle à l'aire apparente $d\sigma$ de ds vue par la surface ds' .

Pour une source quelconque, on définit alors la *luminance énergétique* par $dW = e d\sigma d\omega$, ce coefficient ne dépendant que de la nature et de la température de la source, ainsi que de la direction définie par les deux surfaces. On peut définir également une luminance énergétique par unité spectrale par $dW_\lambda = e_\lambda d\sigma d\omega d\lambda$, et on a alors $e = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$.

2) Facteur d'absorption:

Considérons à présent un corps quelconque. Lorsqu'un rayonnement arrive sur un élément de surface ds de ce corps, une partie est réfléchie, une autre est diffusée, et une autre est transmise, tout ceci représentant une énergie. Par contre, toute l'énergie incidente dW_λ ne se retrouve pas dans ces divers rayonnements : une partie dW'_λ a été *absorbée* par le corps. On

définit alors le *facteur d'absorption au point A dans la direction AA'* par $a_\lambda = \frac{dW'_\lambda}{dW_\lambda}$.

L'expérience montre qu'il est indépendant de la puissance reçue, ce qui donne un sens à sa définition.

3) Corps noir. Définition, intensité spécifique et énergie:

On appelle alors *corps noir* un corps qui quelque soit la direction, le point considéré et la longueur d'onde de la radiation, a un facteur d'absorption nul. La réalisation pratique d'un tel corps noir est constitué d'une enceinte fermée opaque (c'est-à-dire dont les parois intérieures sont absorbantes et percé d'un petit trou. En effet, tout rayonnement entrant dans la cavité va

subir un nombre important de réflexion sur les parois de la cavité avant de retrouver l'orifice (s'il le retrouve...). Au cours de ces réflexions il est partiellement absorbé mais après un grand nombre il se retrouve complètement absorbé.

Considérons alors un tel corps noir. Si on maintient l'enceinte à une température constante, le système va atteindre un état d'équilibre caractérisé par une uniformité de la température à l'intérieur de la cavité.

En réalité, cet état n'est pas un état d'équilibre, mais un état stationnaire, puisque l'intérieur de l'enceinte est continuellement traversé en tous sens par du rayonnement. On peut alors, en considérant toujours deux angles solides comme précédemment, mettre l'énergie transportée par un faisceau sous la forme:

$$dW_\lambda = E_\lambda d\sigma d\omega d\lambda.$$

Il semble à priori que le coefficient E_λ dépende de la position des surfaces considérées et de leur orientation, ainsi que de la nature des parois de l'enceinte. En réalité, un raisonnement thermodynamique simple montre qu'il n'en est rien:

En effet, considérons deux enceintes constituant des corps noirs différentes, mais maintenues à une température constante, la même pour les deux. A l'aide de diaphragme et d'une lentille, concentrons le rayonnement sortant de l'enceinte 1 sur l'orifice de l'enceinte 2 de manière à ce qu'il pénètre intégralement dans l'enceinte 2. On a alors fait de même dans l'autre sens. On suppose également que seul une fraction $\Delta\lambda$ du rayonnement participe à cet échange.

L'enceinte 2 reçoit alors dans ces conditions une puissance $\Delta W_1 = E_\lambda^1 \sigma_1 \omega_1 \Delta\lambda$, et l'enceinte 1 $\Delta W_2 = E_\lambda^2 \sigma_2 \omega_2 \Delta\lambda$. Comme les températures des deux enceintes restent constantes, le premier principe de la thermodynamique nous dit que $\Delta W_1 = \Delta W_2$. Par ailleurs, l'optique géométrique nous apprend que $\sigma_1 \omega_1 = \sigma_2 \omega_2$. On a alors $E_\lambda^1 = E_\lambda^2$, et ceci quelques soient les enceintes considérées. *Le coefficient E_λ est ne dépend que de la température et de la longueur d'onde considérée, et il constitue une fonction universelle ne dépendant pas de l'enceinte considérée. On appelle ce facteur **intensité spécifique du corps noir**.* Le coefficient $E = \int_0^\infty E_\lambda$ est appelé *intensité spécifique totale du corps noir*.

Nous voulons maintenant calculer et définir l'énergie par unité de volume du rayonnement du corps noir. Considérons pour cela une surface $d\sigma$. Les radiations qui émettent dans une angle solide $d\omega$ s'appuyant sur $d\sigma$ transportent donc la puissance $E_\lambda d\sigma d\omega d\lambda$, ou l'énergie $E_\lambda d\sigma d\omega d\lambda dt$ pendant dt .

Or cette énergie était localisée avant dans l'ensemble des cylindres de base $d\sigma$ et faisant l'angle θ avec la surface. En introduisant la *densité spectrale d'énergie* u_λ , où $u_\lambda d\lambda$ est l'énergie par unité de volume de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, on a:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \sin\theta u_\lambda c d\lambda d\sigma dt = E_\lambda d\lambda d\sigma dt \int_{esp} d\omega, \text{ soit } \pi.c.u_\lambda = E_\lambda 4\pi$$

On a alors $u_\lambda = \frac{4E_\lambda}{c}$, et c'est à cette grandeur et à la densité d'énergie totale du corps noir

par $u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda$ que nous nous intéresserons par la suite.

Signalons juste pour l'instant que comme E_λ ne dépend que de la température, il en est de même pour u_λ et u .

4) Cas d'un corps non noir: loi de Kirchhoff:

Considérons un corps quelconque, placé dans une enceinte constituant un corps noir. De même que précédemment, un faisceau émis par un élément de surface de ce corps transporte l'énergie $dW_\lambda = e_\lambda d\sigma d\omega d\lambda$. Par ailleurs, si l'on considère le même faisceau mais cette fois incident, on peut écrire que ce rayonnement transporte la puissance (qui est celle du corps noir) $dW'_\lambda = E_\lambda d\sigma d\omega d\lambda$, et la partie de ce rayonnement absorbée par le corps vaut $a_\lambda dW'_\lambda$. L'excès d'énergie total absorbé par le corps est alors la somme sur tous les faisceaux et sur toutes les longueurs d'onde de $dW_\lambda - a_\lambda dW'_\lambda$. Or, si l'on considère que l'on est à l'équilibre thermique, cet excès doit être nul, et donc on a $\iiint (e_\lambda - a_\lambda E_\lambda) d\sigma d\omega d\lambda = 0$, ce qui signifie que $e_\lambda = a_\lambda E_\lambda$. On trouve alors la loi de Kirchhoff:

La luminance spectrale d'un corps, pour une certaine température, pour une certaine longueur d'onde et dans une certaine direction, est égale à son facteur d'absorption dans les mêmes conditions, multiplié par l'intensité spécifique du corps noir aux même température et longueur d'onde.

Ceci a une conséquence pratique très importante : *un corps non noir ne peut émettre que ce qu'il peut absorber* ($a_\lambda \neq 0$).

B) Etude thermodynamique du corps noir:

1) Pression de radiation:

Tout rayonnement exerce une force sur une surface et donc génère une pression de radiation. Calculons cette pression de radiation dans le cas du corps noir. Dans ce cas, tout photon tombant sur la surface va être absorbé. Cependant, le corps noir à une certaine température va également en émettre, et à l'équilibre thermique le nombre de photons absorbés et émis vont être égaux. Tout se passe donc comme si la collision entre les photons et la surface était élastique.

Considérons alors les photons tombant sur la surface avec une incidence θ . D'après les relations de de Broglie, la quantité de mouvement cédée à la surface va être $2p_z = 2 \frac{h\nu}{c} \cos \theta$.

Par ailleurs le nombre de photons qui heurtent cette surface dS pendant dt est le nombre de photons contenus dans un cylindre de base dS et de hauteur $c \cos \theta dt$. La variation de quantité de mouvement causée par ces photons vaut alors, avec $n_\nu d\nu$ photons par unité de volume et de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

$dp_z = 2n_\nu h\nu \cos^2 \theta dS dt d\nu$. Il en résulte alors une pression de radiation pour l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$: $dP = 2nh\nu \cos^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi}$. La pression de radiation totale vaut alors, pour

une fréquence donnée: $P = \int_0^\infty d\nu n_\nu h\nu \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d(-\cos \theta) = \int_0^\infty \frac{n_\nu h\nu}{3} d\nu$. Or

$\int_0^\infty n_\nu h\nu d\nu$ représente exactement la densité d'énergie par unité de volume pour une fréquence (ou une longueur d'onde) donnée. On en déduit que:

$$P = \frac{u}{3}$$

2) Loi de Stefan. Conséquences thermodynamiques:

Ecrivons alors l'énergie interne du rayonnement enfermé dans l'enceinte. On a $U(V, T) = Vu(T)$. Or, de manière générale, on a $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = l - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$.

On a alors: $u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$, soit en intégrant $\boxed{u = \sigma T^4}$, où σ est une constante, appelée constante de Stefan, avec $\sigma = 0,75646410^{-15} \text{ J.m}^{-3} \text{ K}^{-4}$. Ce résultat constitue la *loi de Stefan*.

En fait, cette loi de Stefan peut être démontrée à partir de la thermodynamique quantique, ce que ne nous ferons pas ici. Cependant, en remarquant que le rayonnement du corps noir combine thermodynamique, électromagnétisme et mécanique quantique, on doit avoir dans la constance de Stefan les trois constantes k_B, c, h . Une analyse dimensionnelle montre alors que $\sigma \propto \frac{k_B^4}{h^3 c^3}$. La valeur réelle, donnée par la mécanique statistique est $\sigma = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^3}$.

On peut déduire de cette loi un certain nombre de propriétés thermodynamiques du rayonnement:

- l'énergie interne vaut $U = \sigma T^4 V$ et la capacité calorifique à volume constant vaudra alors $C_V = 4\sigma T^3 V$. Notons que celle-ci est très faible en raison de la faible valeur de la constante de Stefan.

- L'entropie du rayonnement est alors donnée par $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$, soit

$$dS = 4\sigma T^2 V dT + \frac{4}{3} \sigma T^3 dV \quad \text{et} \quad \left(\frac{dS}{dT}\right)_V = 4\sigma V T^2. \quad \text{On en tire} \quad S = 4\sigma V \frac{T^3}{3} + f(V). \quad \text{Or}$$

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_T = \frac{4}{3} \sigma T^3 = \frac{4}{3} \sigma T^3 + f'(V), \quad \text{d'où} \quad f = \text{cste} = 0 \quad \text{et} \quad S = \frac{4}{3} \sigma V T^3.$$

3) Loi de Wien:

Un autre raisonnement thermodynamique un peu plus subtil, fait par Wien, montre que $u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Le fait que la répartition spectrale du rayonnement du corps noir est appelé loi de déplacement de Wien. Par ailleurs, l'expérience montre que la courbe isotherme $u_\nu = g(\nu)$ présente un maximum donné par $\nu_{T, \text{max}}$. Ce maximum est alors donné par

$$\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial \nu}\right)_T = 3\nu^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu^3}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) = T^2 \left\{ 3\left(\frac{\nu}{T}\right)^2 f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \left(\frac{\nu}{T}\right)^3 f'\left(\frac{\nu}{T}\right) \right\} = 0, \quad \text{ce qui correspond à}$$

$h\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0$. Cette fonction ne dépendant que du rapport ν/T , on en déduit que le maximum de la courbe u_ν se déplace avec la température de telle sorte que l'égalité précédente soit toujours vérifiée, soit $\boxed{\frac{\nu}{T} = C^{\text{ste}}}$.

La loi de Wien est également confirmée par la mécanique statistique, puisqu'elle démontre que $u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h \nu} - 1}$, cette loi permettant également de démontrer la loi de Stefan.

C) Conséquences:

1) Rayonnement d'équilibre thermique:

Considérons les courbes expérimentales de rayonnement thermique à température ambiante. On voit que le maximum de la courbe ne se situe pas dans le visible, et que dans ce domaine le rayonnement d'équilibre thermique est très faible. Ceci explique pourquoi aucun corps n'émet un tel rayonnement à température ambiante. En effet, d'après la loi de Kirchhoff, cette émission est proportionnelle à celle du corps noir, qui peut être considérée ici comme nulle.

Le corps noir chauffé commence à donner une sensation de lumière vers 500°C, où il paraît rouge (résistance dans un grille pain). Ensuite il devient jaune, puis blanc (métal chauffé à blanc...) vers 1200°C, c'est-à-dire que l'ensemble des radiations visibles se situe dans la cloche de la courbe. Si on considère le soleil comme un corps noir, comme son émission maximale se fait à 0,5µm, on en déduit que sa température de surface vaut environ 5800K. De manière générale, les étoiles les plus chaudes émettent un rayonnement dans le bleu alors que les plus froides émettent dans le rouge.

2) Température des planètes:

D'après la loi de Stefan, on peut relier l'intensité spécifique totale du corps noir à la température par $E = \frac{\sigma \cdot c}{4} T_s^4$.

Le soleil va alors émettre une puissance totale $P = \frac{\sigma \cdot c}{4} T_s^4 4\pi R_s^2$. Considérons alors une planète de rayon R_p située à la distance d du soleil. Elle va recevoir une fraction de cette puissance $P' = P \frac{\pi R_p^2}{4\pi d^2}$. En régime permanent, si on considère la planète également comme un corps noir, cette puissance va être totalement réémise selon la loi de Stefan $P' = \frac{\sigma \cdot c}{4} 4\pi R_p^2 T_p^4$, ce qui donne, en égalant les deux expressions: $T_p^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{R_s}{d} \right)^2 T_s^4$, soit

$T_p = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2d}}$. On peut en déduire un ordre de grandeur de la température de Terre, qui donne $T_T = 285K = 12^\circ C$. Le résultat n'est pas trop mal, mais la simplification à outrance du problème fait que pour d'autres planètes le résultat est loin des vraies valeurs. En particulier pour la lune on devrait trouver la même température, ce qui est loin d'être le cas. C'est probablement l'hypothèse d'uniformité de température qui doit être changée.

3) Rayonnement dans une sphère en extension:

Considérons une sphère dont le rayon augmente au cours du temps et à l'intérieur de laquelle existe un rayonnement électromagnétique. L'énergie moyenne de ce rayonnement à pour expression $E_{em} = \frac{4}{3} \pi R^3 u_v$.

On suppose par ailleurs que l'expansion est isentropique, c'est-à-dire adiabatique réversible. En reprenant l'expression de l'entropie du rayonnement du corps noir, on obtient

que $T^3V = C^{ste}$, soit $T = \frac{C^{ste}}{R}$. Ainsi la température T associée au rayonnement diminue au fur et à mesure que le rayon augmente. Cette étude est à la base du modèle cosmologique standard de l'univers, et permet par exemple de déterminer à l'aide du rayonnement résiduel à 2,72K le rapport d'expansion de l'univers. En effet, en considérant qu'au moment du Big-Bang la température valait 3000K, on a $\frac{R}{R_e} = \frac{T_e}{T} \approx 1100$.

Un autre phénomène peut être interprété par ce modèle : le déplacement spectral vers le rouge.

Supposons que le rayon de la sphère soit multiplié par un facteur α , i.e. $R' = \alpha R$. Le nombre de photon par unité de volume est alors multiplié par $1/\alpha^3$. La température est, elle divisée par α et l'énergie volumique totale est donc multipliée, en vertu de la loi de Stefan, par $1/\alpha^4$. Il en résulte que l'énergie de chaque photon est multipliée par $1/\alpha$, et donc que la longueur d'onde est elle multipliée par α .

L'expansion isentropique a produit un décalage vers le rouge défini par $\frac{\lambda'}{\lambda} = \alpha > 1$. C'est en observant ce décalage vers le rouge que le physicien américain Hubble déduisit la loi selon laquelle les étoiles ont une vitesse de récession d'autant plus grande qu'elles sont éloignées.