LP 23 Etude de la conduction thermique.
Applications.

Introduction: Nous avons défini en thermodynamique la chaleur comme l'échange d'énergie au niveau microscopique à travers la surface qui délimite un système.

Nous allons aujourd'hui étudier les mécanismes de ce mode de transfert d'énergie dans le cas où il n'y a pas de déplacement global de matière. Il s'appelle dans ce cas conduction ou diffusion thermique.

Nous établirons tout d'abord l'équation différentielle qui régit cette diffusion, puis nous étudierons quelques cas particuliers et applications.

Expérience: bouchons fixés au bout de quatre tiges de métaux différents chauffées par une bougie. Montre que:

- il existe un phénomène tendant à uniformiser la température.
- La rapidité de ce phénomène dépend du matériau étudié.

A) Etude de la conduction thermique.

1) Flux thermique et courant thermique volumique. Loi de Fourier:

Considérons un volume *V* délimité par une surface fermée *S*. Lorsque le volume échange de la chaleur avec l'extérieur, son énergie interne varie de δU . Par définition, on appelle *flux thermique* le flux d'énergie interne non convectif à travers une surface:

$$\boxed{I_{Th} = \frac{\delta U}{dt}}$$

On définit alors un *vecteur courant volumique non convectif d'énergie interne* à travers une surface ouverte *S* dans un sens défini par la normale à cette surface par:

$$\boxed{I_{Th} = \int_S \vec{J}_{Th}.\vec{n}dS}$$

Expérimentalement, on remarque que ce vecteur est nul lorsque la température du système considéré est uniforme, et qu'il est non nul dès que la température est non uniforme, c'est-à-dire dès qu'il existe un gradient de température.

Par ailleurs, on sent intuitivement que ce vecteur, caractérisant le transport de chaleur, va être dirigé vers les zones de basse température. Ainsi dans une approximation linéaire, on peut écrire la *loi de Fourier*:

$$\boxed{\vec{J}_{Th} = -\lambda.\overrightarrow{grad}T}$$

Bien qu'il s'agisse d'une approximation linéaire, cette loi est bien vérifiée par l'expérience, beaucoup mieux que d'autres lois du genre comme par exemple la loi de Fick $\vec{J}_n = -\overrightarrow{grad}n_v$, limitée par les grandes ou les petites concentrations.

Le coefficient λ est appelé *conductivité thermique*. Il s'exprime en $W.m^{-1}K^{-1}$.

Perez thermo p.155

2) Bilan d'énergie:

Considérons à nouveau un volume quelconque *V* délimité par une surface fermée *S*. De manière générale les variation d'énergie interne sont dues à deux facteurs:

- l'énergie échangée avec l'extérieur et qui donc passe par la surface *S*
- l'énergie créée par des dispositifs intérieurs au volume (résistance…)

On a alors $dU = \delta U^r + \delta U^p$.

Ces différents termes s'explicitent comme suit $dU = d\int \rho u dV$, où u désigne l'énergie interne massique et ρ la masse volumique du système étudié, $\delta U^r = -dt\int \vec{J}_{th}.\vec{n}dS$, le signe moins provenant du fait que l'on compte positivement les énergies reçues et $\delta U^p = dt\int \sigma_u dV$, où σ_u désigne le taux de production d'énergie interne par unité de temps et de volume. Le bilan d'énergie s'écrit alors:

$\frac{d}{dt}\int \rho u dV = -\int \vec{J}_{Th}\vec{n}dS + \int \sigma_u dV = -\int div\vec{J}_{Th}dV + \int \sigma_u dV$ en utilisant la formule d'Ostrogradsky. Comme le volume a été pris de manière quelconque, on a:

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -div\vec{J}_{Th} + \sigma_u}$$

3) Equation différentielle de la diffusion thermique:

La thermodynamique nous dit par ailleurs que $dU = C_v dT$, soit $d(\rho u) = \rho c_v dT$, où $c_v = C_v / \rho$ est la capacité thermique massique à volume constant. On a alors, en utilisant la loi de Fourier:

$\rho.c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.div\overrightarrow{grad}T + \sigma_u$, soit

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_v}}, \text{ où } a = \frac{\lambda}{\rho.c_v}$$

est appelée *diffusivité thermique*

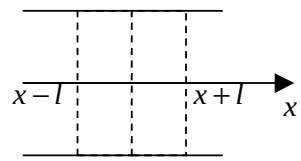
Cette équation a la forme générale d'une équation de diffusion, c'est-à-dire du premier ordre en *t* et du second ordre en coordonnées spatiales. En raison du premier ordre en *t*, elle est fondamentalement différente d'une équation de propagation qui est du second ordre en *t* et donc les phénomènes physiques qui lui seront associés seront fondamentalement différents.

B) Interprétation microscopique de la diffusion thermique.

Avant d'étudier les solutions de cette équation, nous allons tenter de modéliser les phénomènes microscopiques qui sont à l'origine de cette diffusion thermique afin d'en retirer les paramètres pertinents.

1) Analyse quantitative simple:

Pour simplifier, nous allons nous placer dans une situation unidimensionnelle, ce qui n'enlève rien à la généralité des considérations que nous allons faire mais qui simplifie grandement le traitement calculatoire.



On considère alors deux compartiments contenant des particules avec la même densité, mais avec une agitation thermique différente, ce qui traduit le fait que l'énergie interne est plus grande dans le compartiment C_1 que dans C_2.

En moyenne, il y a $n_v/6$ particules qui se déplacent suivant les *x* croissants et autant qui suivent le sens opposé. Pendant *dt*, les particules qui traversent le plan situé à l'abscisse *x* sont celle qui étaient situées dans le volume de base *S* et de hauteur $l = v_m dt$, si on désigne par *l* le libre parcours moyen. Il y en a donc $n_v/6 S v_m dt$. En faisant le même raisonnement pour les particules allant dans l'autre sens, on tire le courant résultant:

$J_{Th} = v_m \frac{n_v}{6}\left\langle \frac{m}{2}v_x^2(x-l) - \frac{m}{2}v_x^2(x+l)\right\rangle$. Or d'après le théorème de l'équipartition de l'énergie, $\frac{m}{2}v_x^2 = \frac{1}{2}k_B T$, et donc $J_{Th} = v_m \frac{n_v}{6}\frac{k_B}{2}(T(x-l)-T(x+l)) = -l v_m \frac{n_v}{6}k_B \frac{\partial T}{\partial x}$, ce qui donne en identifiant à la loi de Fourier $\lambda = l v_m \frac{n_v}{6}k_B$. Or toujours en utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie, on a $\frac{n_v k_B}{2} = \rho c_v$ et une analyse microscopique de la diffusion des particules montre que le coefficient de diffusion vaut $D = \frac{l v_m}{3}$. Les deux phénomènes sont donc étroitement reliés par la relation $\boxed{\lambda = \rho . c_v D}$. On voit alors que la diffusion thermique provient de la diffusion de particules qui vont apporter leur énergie cinétique microscopique des régions à haute énergie interne (haute *T*) vers les régions à basse énergie interne.

2) Différents cas:

- pour les gaz, en utilisant le fait que $D = \frac{(RT)^{3/2}}{\sigma . p . \sqrt{M}}$, σ étant la section efficace et en utilisant le fait que $\rho = \frac{pM}{RT}$, on obtient, puisque $c_v = C_{v,m}/M$ que $\lambda = \frac{C_{vm}}{\sigma}\sqrt{\frac{RT}{M}}$. Expérimentalement, on constate bien l'indépendance de la conductivité thermique en pression, mais la dépendance en température est plus difficile à vérifier car la section efficace dépend de la température.
- La conductivité des liquides est beaucoup plus grande que celle des gaz, ce qui s'interprète par la dépendance de la conductivité thermique en ρ.
- Pour les solides, le problème est plus délicat. En effet, la diffusion thermique a deux contributions:
  - D'une part les vibrations du réseaux, prépondérante dans les isolants
  - D'autre part les électrons de conduction, prépondérante dans les conducteurs

Dans les métaux purs, ce sont les mêmes porteurs qui assurent la diffusion thermique et la conduction de l'électricité, ce qui explique pourquoi les bons conducteurs sont aussi bons conducteurs de la chaleur.

La conductivité électrique a pour expression $\gamma = \frac{n_v e^2 \tau}{m_e} = \frac{n_v e^2 v_m}{m_e v_m}$, et on en déduit que $\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{c_v m_e^2 v_m^2}{3 q_e^2}$. Si l'on admet que, comme pour les gaz parfaits, $\frac{m_e v_m^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$, on a $\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{q_e}\right)^2 T$, ce qui s'écrit $L = \frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{q_e}\right)^2 = 11.10^{-9}\, SI$, loi connue sous le nom de *loi de Wiedemann – Franz*. *L* est appelé *nombre de Lorentz*.

C) Résolution de l'équation de diffusion.

1) Cas général:

Avant de nous intéresser à la solution générale, intéressons nous à la solution en régime stationnaire, sans terme de production.

L'équation de diffusion se réduit alors, pour un problème unidimensionnel, à $\frac{dT^2}{dx^2}=0$, et donc la solution est immédiate: $T=ax+b$, les coefficients *a* et *b* étant déterminés par les conditions aux limites. Par exemple, pour un barreau soumis en *x*=0 à une température T_0 et à un flux de chaleur constant J_0 en $x=l$, on aure $T=-\frac{J_0}{\lambda}x+T_0$. On s'aperçoit d'ailleurs que le courant volumique thermique est constant le long de la barre.

Dans le cas général, la solution n'est pas triviale. Contentons nous ici de dire que, comme toute équation de diffusion, la solution relève d'une loi statistique de Gauss, et on trouve le résultat suivant:

$$\boxed{T(x,t)=A\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-y^2}dy} \text{ avec } u=\frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

Ce résultat mérite d'être interprété. D'une part, on voit que le front de température avance en $\sqrt{t}$, contrairement à une équation de propagation où il avance en *t*. Par ailleurs, la largeur à mi-hauteur de cette répartition varie avec le temps en $\sqrt{t}$.

2) Régime sinusoïdal établi:

L'étude de la diffusion thermique en régime sinusoïdal présente un intérêt pratique considérable, puisque d'une part tout régime variable peut être considéré comme une superposition de régimes sinusoïdaux, d'autre part parce que le problème constitue une bonne approche de l'influence des changements de température quotidiens ou annuels.

Désignons par $\theta=T-T_m$ l'écart à une valeur moyenne de la température. En régime sinusoïdal établi, posons $\theta=\theta_m e^{-i\omega t}$. L'équation de diffusion s'écrit alors:

$$\frac{d^2\theta_m}{dx^2}-\frac{j\omega}{a}\theta_m=0$$

Cherchons alors une solution de la forme $\theta_m=Ae^{rx}$. On obtient alors:

$r^2=j\frac{\omega}{a}$, et donc $r=\pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$. L'écart en température devant rester fini lorsque *x* augmente, on a:

$\theta=\theta_m e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)$. On voit alors qu'à une profondeur de quelques $\delta=\sqrt{\frac{2a}{\omega}}$, la fluctuation de température devient négligeable.

On peut alors étudier deux cas particuliers:

- dans le cas de fluctuations quotidiennes, l'épaisseur thermique δ du sol vaut, avec $\omega=7{,}310^{-5}\,rad.s^{-1}$ et $a=0{,}28.10^{-6}\,SI$, 8,7cm. Si l'on admet une amplitude de température de 10°C, la fluctuation à une profondeur de 25cm n'est plus que de 0,5°C. On comprend alors l'intérêt d'enterrer les canalisations pour éviter le gel en hiver.

- Dans le cas de fluctuations annuelles, on a $\delta = 1{,}7m$. Ainsi, dans un cave bien enterrée, la température est pratiquement constante au cours de l'année.

3) Température de contact:

Nous allons ici utiliser l'équation de diffusion pour interpréter la sensation de chaud et de froid que l'on constate lorsqu'on touche des matériaux qui sont à la même température. Par exemple on se brûle lorsqu'on touche une plaque métallique à 100°C, alors que l'on supporte une pince en bois à la même température.

Considérons le contact de deux matériaux à des températures différentes, avec $T_1 < T_2$. De manière générale, l'équation de diffusion admet comme solution mathématique $f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$, avec $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$, avec $f_D(+\infty, t) = 1$ et $f_D(-\infty, t) = -1$. On admet qu'à l'interface il s'établit instantanément une température stationnaire T_0.

On cherche donc une solution sous la forme $T_i = a_i + b_i f_{Di}(x,t)$. D'après les conditions aux limites, on a $a_1 = a_2 = T_0$, $b_1 = T_0 - T_1$ et $b_2 = T_2 - T_0$.

On exprime alors l'égalité des flux thermique en $x = 0$. De manière générale, on a $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda . b . \frac{df_D}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda b \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{2Dt}}$. La continuité impose, à tout *t* et en $u = x = 0$:

$\frac{\lambda_1}{\sqrt{D_1}}(T_0 - T_1) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{D_2}}(T_2 - T_0)$. En introduisant alors *l'effusivité du milieu* $E = \sqrt{\rho c \lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{D}}$, on trouve $T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$. On voit alors que les caractéristiques du milieu interviennent directement dans la température de contact et donc dans la sensation que l'on en a.

En particulier, avec la peau $T_1 = 37°C$

- pour du métal à $T_2 = 20°C$, $T_0 = 21{,}9°C$
- pour du bois à $T_2 = 20°C$, $T_0 = 33{,}9°C$

3) Bilan entropique:

Il convient de noter que le phénomène de diffusion thermique est totalement irréversible. En effet, la chaleur ne se diffusera pas spontanément du froid vers le chaud. Pourtant, l'écoulement de chaleur à travers un barreau en régime permanent est isentropique. Nous allons ici comprendre pourquoi.

On considère un barreau en contact avec deux solides de températures initiales T_1^0 et T_2^0. La tige a une longueur *l*, une section *s*, une conductivité thermique λ et une capacité thermique négligeable, tandis que les deux solides sont identiques et ont même capacité thermique *C*.

Ces hypothèses permettent de dire que la tige sera à tout instant en régime stationnaire, c'est-à-dire que la distribution de température sera, compte tenu des conditions aux limites:

$T(x,t) = T_1(t) - \frac{T_1(T) - T_2(T)}{l} x$.

Effectuons alors un bilan de puissance:

En raison de l'uniformité du flux, on a $P = -C\frac{dT_1}{dt} = C\frac{dT_2}{dt} = j_{TH}\,s = \frac{\lambda.s}{l}\left(T_1(t) - T_2(t)\right)$, et donc $\frac{d\left(T_1 - T_2\right)}{dt} = -2\frac{T_1 - T_2}{R_{Th}C}$, avec $R_{Th} = \frac{l}{\lambda.s}$, résistance thermique du matériau. On a alors $T_1 - T_2 = \left(T_1^0 - T_2^0\right)e^{-\frac{2t}{R_{Th}C}}$.

Par ailleurs, l'énergie thermique cédée par l'un des corps est transférée à l'autre, et donc $\delta Q = -CdT_1 = CdT_2$, ce qui implique que $T_1 + T_2 = T_1^0 + T_2^0$, ce qui donne:

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\left(T_1^0 + T_2^0\right) + \left(T_1^0 - T_2^0\right)e^{-\frac{2t}{R_{Th}C}}\right]$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\left(T_1^0 + T_2^0\right) - \left(T_1^0 - T_2^0\right)e^{-\frac{2t}{R_{Th}C}}\right]$$

Ce qui nous permet d'avoir les variations de température des deux corps. Cependant, ce n'est pas cela qui nous intéresse ici.

Evaluons la variation d'entropie de la tige entre l'instant initial et l'instant final. Elle est la somme de deux contributions:

- l'entropie échangée qui vaut $\int\left(\frac{\delta Q}{T_1} - \frac{\delta Q}{T_2}\right)$
- l'entropie créée dont on peut montrer qu'elle est telle que $\delta^2 S_{créée} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{grad}T}{T}\right)^2 sdxdt$

Si on calcule le terme d'entropie échangée, on a:

$S^{éch} = -\int_{T_1}^{T_f} C\frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_2}^{T_f} C\frac{dT_2}{T_2} = -C\ln\left(\frac{T_f^2}{T_1^0 T_2^0}\right) = -C\ln\left(\frac{\left(T_1^0 + T_2^0\right)^2}{T_1^0 T_2^0}\right) < 0$, ce qui est normal vu que la tige reçoit continuellement de la chaleur à une température élevée et qu'elle la restitue à une température plus basse.

Le calcul du terme de création conduit à $S^{créée} = C\ln\left(\frac{\left(T_1^0 + T_2^0\right)^2}{T_1^0 T_2^0}\right) > 0$. On a donc un bilan entropique pour la tige $\Delta S = 0$. Ceci constitue un des exemples où une transformation irréversible n'est pas adiabatique réversible.

Si on effectue le bilan pour toutes les parties, on obtiendra Garing p 217.