

LP 26 Utilisation des propriétés de symétrie Dans l'étude des champs électromagnétiques Exemples

Intro: Nous avons vu que $\vec{E}$ était créé par une distribution de charges fixe et que $\vec{B}$ était lui engendré par une distribution de courant (charges mobiles).

Nous allons ici étudier comment les symétries de ces distributions influent sur la symétrie du champ électromagnétique créé, ainsi que quelques exemples d'utilisation témoignant du caractère calculatoirement très avantageux d'une étude préalable des symétries lors de la détermination d'un champ électromagnétique à partir des sources qui l'engendrent.

A) Symétries du champ électrostatique $\vec{E}$

1) Symétries d'une distribution de charges

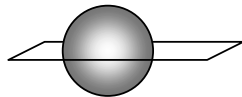
Considérons une distribution de charges quelconque. Considérons également un plan P et un point M de la distribution de charges.

Soit M' le symétrique de M par rapport à P . On associe aux points M et M' une charge $q = \rho.d\tau$ et $q' = \rho'.d\tau$.

→ P est un plan de symétrie pour la distribution de charges si, pour tout couple de points symétriques, on a $q = q'$.

→ P est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges si, pour tout couple de points symétriques, on a $q = -q'$.

Exemples:



Sphère uniformément
chargée : plan de
symétrie

2) Invariances d'une distribution

Une distribution est dite invariante par une transformation géométrique f si, en $M' = f(M)$, on a $q'(M) = q(M)$.

Exemples:



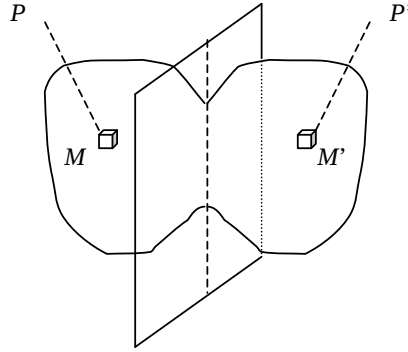
Fil infini invariance
par translation



Cylindre infini
invariance par rotation
autour de l'axe

3) Symétries et invariances du potentiel et du champ $\vec{E}$

Considérons une distribution de charge ayant un plan de symétrie (ou d'antisymétrie):



Les contributions des points M et M' en P et P' s'écrivent, pour le potentiel:

$$\begin{aligned} dV(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{dq}{PM} + \frac{dq'}{PM'} \right) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} + \frac{\epsilon}{PM'} \right) \\ dV(P') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{dq}{P'M} + \frac{dq'}{P'M'} \right) = \frac{\epsilon dq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon}{P'M} + \frac{1}{P'M'} \right) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon = 1 \text{ si symétrie} \\ \epsilon = -1 \text{ si antisym.} \end{cases}$$

Or on a $PM = P'M'$ et $P'M = PM'$ donc par intégration sur tout le demi volume, on a:

$$V(P) = \epsilon V(P')$$

Pour le champ $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} d\vec{E}(P) &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{MP}}{MP^3} + \epsilon \frac{\vec{M'P}}{M'P^3} \right) \\ d\vec{E}(P') &= \frac{\epsilon dq}{4\pi\epsilon_0} \left(\epsilon \frac{\vec{MP'}}{MP'^3} + \frac{\vec{M'P'}}{M'P'^3} \right) \end{aligned}$$

Comme $MP = M'P' = \rho_1$ et $M'P = MP' = \rho_2$, on a $d\vec{E}(P) = \epsilon \cdot \text{sym}(d\vec{E}(P'))$

Démonstration, avec un repère cartésien avec y et z dans le plan de symétrie:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \left(\frac{1}{\rho_1^3} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} + \epsilon \cdot \frac{1}{\rho_2^3} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \right) \quad d\vec{E}(P') = \frac{\epsilon}{4\pi\epsilon_0} dq \left(\frac{\epsilon}{\rho_2^3} \begin{vmatrix} -x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{\rho_1^3} \begin{vmatrix} -x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \right)$$

Un petit schéma permet de conclure...

Conclusion:

→ Si la distribution présente un plan de symétrie, en appelant P' le symétrique de P par rapport à ce plan, on a $V(P) = V(P')$ et $\vec{E}(P) = \text{sym}(\vec{E}(P'))$

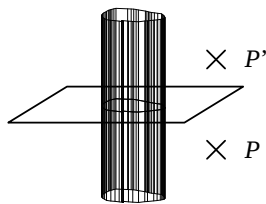
→ Si la distribution présente un plan de symétrie, en appelant P' le symétrique de P par rapport à ce plan, on a $V(P) = -V(P')$ et $\vec{E}(P) = -\text{sym}(\vec{E}(P'))$

Corollaire:

- en tout point d'un plan de symétrie, le champ est dans ce plan
- en tout point d'un plan d'antisymétrie, le champ est orthogonal à ce plan
- et donc:
- en un centre de symétrie, le champ est nul
- en tout point d'un axe de symétrie, le champ est dirigé selon cet axe.

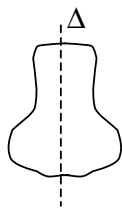
b) Invariances:

→ invariance par translation:



On a directement $\vec{E}(P) = \vec{E}(P')$, et comme on peut choisir, pour un point P donné, n'importe quel plan orthogonal à l'axe d'invariance, on en déduit que le champ est invariant par translation dans cette direction.

→ invariance par rotation:



Comme tout plan contenant l'axe de rotation est un plan de symétrie pour la distribution, on en déduit que:

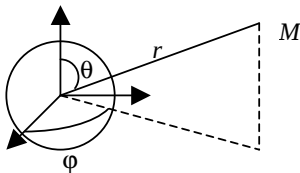
$\vec{E}$ contenu dans tout plan contenant l'axe (en cylindrique, ceci signifie que la composante orthoradiale du champ est nulle).

Par ailleurs, toute rotation étant décomposable en deux symétries planes, on en déduit que $\|\vec{E}\|$ est constant sur un cercle orthogonal à Δ

et centré sur l'intersection entre Δ et le plan orthogonal à Δ contenant ce cercle (autrement dit $\|\vec{E}\|$ ne dépend pas de θ)

4) Un exemple d'utilisation:

Déterminons le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée.



→ (OM) est un axe de symétrie pour la distribution donc

$\vec{E}$ est porté par cet axe : il est radial

→ la distribution est invariante par rotation selon θ et φ

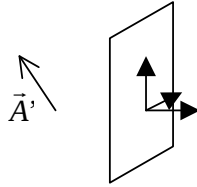
donc $\|\vec{E}\|$ ne dépend pas de θ et φ .

On applique alors le théorème de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \dots$$

B) Symétries du champ magnétique $\vec{B}$.

1) Rappels mathématiques sur la symétrie d'un vecteur:



Si les coordonnées de $\vec{A}$ sont $[\alpha, \beta, \gamma]$, les coordonnées de son (anti)symétrique sont $\vec{A}': \varepsilon[-\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma]$.

$$\rightarrow \vec{A}' + \vec{B}' = \text{sym}(\vec{A}) + \text{sym}(\vec{B}) = \text{sym}(\vec{A} + \vec{B})$$

$$\rightarrow \lambda \cdot \text{sym}(\vec{A}) = \text{sym}(\lambda \cdot \vec{A})$$

$$\rightarrow \text{sym}(\vec{A}) \wedge \text{sym}(\vec{B}) = -\text{sym}(\vec{A} \wedge \vec{B}) \text{ et donc } (\varepsilon \cdot \text{sym}(\vec{A})) \wedge \text{sym}(\vec{B}) = -\varepsilon \cdot \text{sym}(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

2) Symétrie d'une distribution de courant:

$\rightarrow$ si $\vec{j}' = \text{sym}\vec{j}$ alors le plan est un plan de symétrie

$\rightarrow$ si $\vec{j}' = -\text{sym}\vec{j}$ alors le plan est un plan d'antisymétrie

On notera donc $\vec{j}' = \varepsilon \cdot \text{sym}\vec{j}$.

3) Symétrie et invariance du potentiel vecteur $\vec{A}$ et du champ magnétique $\vec{B}$:

Considérons une distribution de courant présentant un plan de (anti)symétrie.

Evaluons comme pour V les contributions des courants $\vec{j}$ et $\vec{j}'$ en P et P' .

$$d\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j}}{PM} + \frac{\vec{j}'}{PM'} \right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j}}{\rho_1} + \frac{\varepsilon \cdot \text{sym}\vec{j}}{\rho_2} \right) d\tau$$

$$d\vec{A}(P') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j}}{P'M} + \frac{\vec{j}'}{P'M'} \right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j}}{\rho_2} + \frac{\varepsilon \cdot \text{sym}\vec{j}}{\rho_1} \right) d\tau$$

$$d\vec{A}(P') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\text{sym}(\text{sym}\vec{j})}{\rho_2} + \frac{\varepsilon \cdot \text{sym}\vec{j}}{\rho_1} \right) d\tau = \varepsilon \frac{\mu_0}{4\pi} \text{sym} \left(\frac{\vec{j}}{\rho_1} + \frac{\varepsilon \cdot \text{sym}\vec{j}}{\rho_2} \right) d\tau$$

$$d\vec{A}(P') = \varepsilon \cdot \text{sym}(d\vec{A}(P))$$

Pour le champ magnétique, on a:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{PM}}{\rho_1^3} + \frac{\varepsilon \cdot (\text{sym}\vec{j}) \wedge \overrightarrow{PM'}}{\rho_2^3} \right) \text{ et}$$

$$d\vec{B}(P') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{P'M}}{\rho_2^3} + \frac{\varepsilon \cdot (\text{sym}\vec{j}) \wedge \overrightarrow{P'M'}}{\rho_1^3} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} d\vec{B}(P') &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\text{sym}(\text{sym}\vec{j}) \wedge \overrightarrow{P'M}}{\rho_2^3} + \frac{\varepsilon(\text{sym}\vec{j}) \wedge \overrightarrow{P'M'}}{\rho_1^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\text{sym} \left(\frac{\text{sym}\vec{j} \wedge \overrightarrow{P'M}}{\rho_2^3} \right) - \varepsilon \cdot \text{sym} \frac{\vec{j} \wedge \overrightarrow{P'M'}}{\rho_1^3} \right) \\ &= -\varepsilon \cdot \text{sym}(d\vec{B}(P)) \end{aligned}$$

$$\boxed{d\vec{B}(P') = -\varepsilon \cdot \text{sym}(d\vec{B}(P))}$$

Conclusion:

→ Si la distribution de courant présente un plan de symétrie, alors la distribution du vecteur $\vec{A}$ est symétrique par rapport à ce plan, tandis que ce plan est un plan d'antisymétrie pour la distributions du vecteur $\vec{B}$.

→ Si la distribution de courant présente un plan d'antisymétrie, alors la distribution du vecteur $\vec{A}$ est antisymétrique par rapport à ce plan, tandis que ce plan est un plan de symétrie pour la distributions du vecteur $\vec{B}$.

Corollaires:

→ En tout point d'un plan de symétrie, $\vec{A}$ appartient à ce plan et $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan.

→ En tout point d'un plan de symétrie, $\vec{A}$ est orthogonal à ce plan et $\vec{B}$ appartient à ce plan.

→ En tout point d'un axe de symétrie, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{A}$ est porté par cet axe.

→ En tout centre de symétrie, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont nuls.

4) Invariances:

→ Comme toute translation est décomposable en deux symétries planes, on en déduit que si une distribution est invariante par translation, alors les distributions des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ le sont également.

→ idem avec les rotations

5) Un exemple d'utilisation: le fil rectiligne infini:



Invariance par translation selon z . donc B ne dépend pas de z .

Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie donc $\vec{B}$ est orthoradial.

→ théorème d'Ampère

Pour le calcul de $\vec{A}$, on utilise $\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$, en utilisant un contour rectangulaire passant par l'axe et par le point et, à une condition initiale $A(0)$ près, on détermine $\vec{A}$