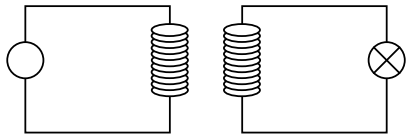
LP 30 Energie du champ électromagnétique vecteur de Poynting
Densité d'énergie électromagnétique

Introduction expérimentale:



De l'énergie est passée du circuit 1 au circuit 2, mettant en mouvement les porteurs de charge, et ceci sans support matériel.

Par ailleurs une des constatations expérimentales des plus ordinaires mettant en évidence ce transport d'énergie est la chaleur que le soleil fournit à la Terre.

On en arrive à supposer que de l'énergie est transportée par les ondes électromagnétiques. C'est ce que nous allons ici essayer de démontrer.

A) Conservation de l'énergie électromagnétique:

1) Identité de Poynting:

Ecrivons les équations de Maxwell - Ampère et de Maxwell – Faraday:

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On peut faire une combinaison linéaire de ces deux équations pour obtenir:

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}.\overrightarrow{rot}\vec{B} - \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right)$$

Ce qui s'écrit, via les transformations sur les opérateurs vectoriels:

$$-\frac{1}{\mu_0} div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right)$$

Soit donc finalement:

$$\boxed{\vec{j}.\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right) + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) = 0}$$

Cette égalité porte le nom d'identité de Poynting.

2) Interprétation physique:

Intégrons l'identité de Poynting sur un volume *V* quelconque délimité par une surface *S*:

$$\iiint_{(v)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right) d\tau + \iiint_{(v)} \vec{j}.\vec{E} d\tau + \iiint_{(v)} div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) d\tau = 0$$

Commençons par interpréter le second terme.

Considérons pour cela une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$.

La force agissant sur cette charge est la force de Lorentz:

$\vec{f}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}\right)$, dont le travail pendant un temps *dt* est:

$\delta W=\vec{f}.\vec{v}dt=q\vec{E}.\vec{v}dt$

La puissance cédée au charges par le champ électromagnétique s'écrit, pour une charge:

$P=q\vec{E}.\vec{v}$ et, en supposant que tous les porteurs ont la même vitesse $\vec{v}$ dans un volume élémentaire $d\tau$, la puissance cédée au charges dans ce volume s'écrit:

$dP=nq\vec{E}.\vec{v}d\tau$, où *n* est défini par $dN=nd\tau$.

La puissance fournie à l'ensemble des charges vaut donc:

$P=\iiint_{(V)}nq\vec{v}.\vec{E}d\tau=\iiint_{(V)}\vec{j}.\vec{E}d\tau$

Donc si on désigne par E_c l'énergie cinétique totale des charges soumis au seul champ électromagnétique, on a:

$\iiint_{(V)}\vec{j}.\vec{E}d\tau=\frac{dE_c}{dt}$, d'après le théorème de l'énergie cinétique.

Le second terme représente donc la variation d'énergie cinétiques des charges contenues dans le volume de contrôle considéré.

Par ailleurs, le théorème de Green – Ostrogradsky nous dit que:

$\iiint_{(v)}div\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)d\tau=\oiint_{(S)}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.d\vec{S}$

Et l'identité de Poynting se met sous la forme:

$$\iiint_{(v)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{E^2}{2}+\frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right)d\tau+\frac{dE_c}{dt}=-\oiint_{(S)}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.d\vec{S}$$

Afin de pousser plus loin l'interprétation, imaginons une surface telle que $\oiint_{(S)}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.d\vec{S}=0$.

L'identité de Poynting se met alors sous la forme:

$\frac{d}{dt}\left(U_{em}+E_c\right)=0$, où on a posé $U_{em}=\iiint_{(v)}\left(\varepsilon_0\frac{E^2}{2}+\frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right)d\tau$, énergie électromagnétique .

Il s'agit d'une loi de conservation de l'énergie, et elle suggère qu'une partie de l'énergie totale est localisée dans les régions où règne un champ électromagnétique, indépendamment de la présence de charge.

Si on revient à l'expression générale, on a alors:

$$\frac{d}{dt}\left(U_{em}+E_c\right)=-\oiint_{(S)}\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.d\vec{S}$$

La variation de l'énergie mécanique totale correspond donc au flux du vecteur $\vec{R} = \iint_{(S)} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} . d\vec{S}$, appelé vecteur de Poynting.

Ce vecteur est donc directement associé à la puissance transportée par le champ électromagnétique . Son flux à travers une surface *S* donne l'expression de la puissance qui traverse cette surface. Pour une surface fermée, ce flux est positif si la puissance est transportée de l'intérieur vers l'extérieur (diminution de l'énergie électromagnétique à l'intérieur du volume), et négatif dans le cas contraire.

B) Densité d'énergie électromagnétique :

1) Densité d'énergie électrostatique:

Si on considère une distribution de charges immobiles quelconque, l'énergie électrostatique s'écrit:

$E_{el} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \rho . V . d\tau$, où *V* est le potentiel électrostatique et ρ la densité volumique de charges.

$$E_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{(V)} \left(div \vec{E} \right) V . d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{(V)} \left[div\left(V . \vec{E} \right) - \vec{E} . \overrightarrow{grad V} \right] d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\iint_{(S)} V \vec{E} . d\vec{S} + \iiint_{(V)} E^2 d\tau \right]$$

Or si l'on augment jusqu'à l'infini les dimensions du volume, on a $E \alpha \frac{1}{r^2}$, $V \alpha \frac{1}{r}$ et $dS \alpha r^2$, donc $\iint_{(S)} V \vec{E} . d\vec{S} \alpha \frac{1}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

On a donc $\boxed{E_{el} = \iiint_{esp} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau}$

Tout se passe donc comme si l'énergie électrostatique était localisée dans tout l'espace (c'est-à-dire partout où règne un champ électromagéntique), avec une densité volumique d'énergie $\boxed{u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$

2) Energie magnétique:

Pour interpréter la seconde partie de l'énergie électromagnétique, plaçons nous dans l'approximation des régimes quasi stationnaires où on pourra considérer que $\vec{B}$ existe seul.

Considérons à présent un système de courants volumiques placé dans un champ $\vec{B}$.

On décompose ces courants en tubes de courants (*T*) parcourus par des intensités *di* et traversée par des flux φ .

L'énergie totale du système sera donc:

$E_{mg} = \frac{1}{2}\iint_S \varphi di = \frac{1}{2}\iint_S \varphi \vec{j}.d\vec{S}$.

Or on sait par ailleurs d'après les études faites sur le phénomène d'induction que $\varphi = \oint_C \vec{A}.d\vec{l}$, où *C* représente le contour fermé circulant autour d'un tube.

On obtient alors que $\varphi.di = \oint_C \vec{A}.\vec{j}\left(d\vec{l}.d\vec{S}\right)$, et donc que $E_{mg} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}.\vec{j}.d\tau$

Or, dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et donc:

$E_{mg} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}.\frac{\overrightarrow{rot}\vec{B}}{\mu_0} d\tau$.

On sait par ailleurs que $div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\vec{B}$ d'où on tire, puisque $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$

$E_{mg} = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\frac{B^2}{\mu_0} - div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)\right) d\tau = \frac{1}{2}\left[\iiint_V \frac{B^2}{\mu_0} d\tau - \oiint_S \vec{A} \wedge \vec{B}.d\vec{S}\right]$

Si on étend alors le volume d'intégration à tout l'espace, comme $\vec{A}\alpha\frac{1}{r}$, $\vec{B}\alpha\frac{1}{r^2}$ et $dS\alpha r^2$, on a $\oiint_S \vec{A} \wedge \vec{B}.d\vec{S}\,\alpha\frac{1}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

On en tire donc que $\boxed{E_{mg} = \iiint_{esp} \frac{B^2}{2\mu_0}}$

Tout se passe donc comme si l'énergie était distribuée dans tout l'espace où règne un champ magnétique avec une densité d'énergie $\boxed{u_{mg} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$

3) Densité d'énergie électromagnétique:

Le terme en $\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est apparaît donc comme la somme d'une énergie purement électrique et d'une énergie purement magnétique. Ce sont bien des énergies correspondant au champ électromagnétique créé par des distributions de charges en mouvement ou non.

Ce terme est appelé *densité d'énergie électromagnétique*.

C) Applications:

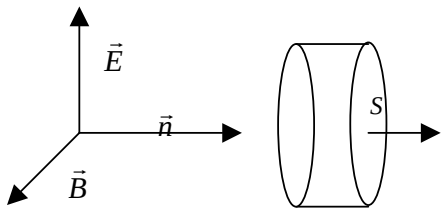
1) Application à l'OPPM:

Dans une OPPM, on a $\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$ et donc la densité d'énergie électromagnétique s'écrit:

$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ et $\vec{R} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c}\right)\vec{n} = \left(\frac{cB^2}{\mu_0}\right)\vec{n}$

On en tire une information très importante : une onde électromagnétique transporte de l'énergie, et celle-ci se propage dans la direction de propagation de l'onde.

Par ailleurs, calculons la puissance traversant une surface *S* perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.



La puissance traversant cette surface vaut:

$$\left\|\vec{R}\right\| S = \frac{E^2}{\mu_0 C} S$$

Si on considère alors que cette puissance correspond à l'énergie contenue dans un petit cylindre, la variation de cette énergie pendant un temps *dt* va s'écrire:

$\delta W = \varepsilon_0 E^2 S c dt$. On peut alors interpréter ce résultat en disant que cette grandeur correspond à la quantité d'énergie qui est passée par *S* pendant *dt*, et qui correspond à l'énergie contenue dans un volume $Scdt$. On en déduit alors que la vitesse de propagation de l'énergie vaut *c*.

Remarque: $\vec{R}$ étant une grandeur quadratique, on ne peut utiliser la notation complexe pour le calculer.

Cependant, pour une OPPM,

$$\left\langle R \right\rangle_t = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left\langle \left(\vec{\underline{E}} + \vec{\underline{E}}^*\right) \wedge \left(\vec{\underline{B}} + \vec{\underline{B}}^*\right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4\mu_0} \left\langle \vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}}^* + \vec{\underline{E}}^* \wedge \vec{\underline{B}} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re\left\{\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}}^*\right\}$$

car $\left\langle \vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}} \right\rangle \alpha \left\langle e^{-2i\omega t} \right\rangle = 0$

On définit alors un vecteur de Poynting complexe par $\vec{\underline{R}} = \frac{\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}}^*}{\mu_0}$ et on aura $\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{1}{2} Re\left\{\vec{\underline{R}}\right\}$.

2) Applications:

a) puissance d'émission d'une radio.

Considérons un émetteur qui émet une puissance moyenne *P* uniformément répartie dans un angle solide Ω. A une distance *r*, la puissance rayonnée à travers la surface vaut $P = Rr^2\Omega$.

A grande distance on a une onde plane polarisée rectilignement et donc on a:

$R = \frac{E^2}{\mu_0 C}$, donc $E_0 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu_0 c P}{\Omega \left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{\Omega}}$

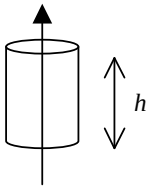
Si on considère à présent un détecteur dont la sensibilité est donnée par l'amplitude minimum $E_{\min}$, on peut définir la portée de l'émetteur par $d = \frac{1}{E_{\min}}\sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{\Omega}}$

Ce qui donne, pour $\Omega = 4\,sr$ et $E_{\min} = 2.10^{-3} V.m^{-1}$

- pour $P = 2W$, $d = 9{,}7km$
- pour $P = 25W$, $d = 34km$
- pour $P = 100kW$ $d = 2170km$

3) Bilan de puissance dans un conducteur:

On considère un conducteur cylindrique, infini, de conductivité σ parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\vec{u}_z$



Le champ électrique est donné par la loi d'Ohm:

$\vec{E} = \frac{j}{\sigma}\vec{u}_z$ et le champ magnétique est donné sur la surface par application du théorème d'ampère:

$$B2\pi R = \mu_0 j \pi R^2 \text{ soit } \vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2} R\vec{u}_\theta$$

On peut alors calculer le vecteur de Poynting:

$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{j^2}{2\sigma} R$ ainsi que la puissance passant par la surface d'un tronçon de conducteur de hauteur h $P = -\frac{j^2 \pi}{\sigma} R^2 h$. Cette puissance est négative donc le champ électromagnétique fournit de l'énergie au tronçon (plus précisément c'est le champ électrique qui met les charges en mouvement).

On peut par ailleurs calculer la puissance dissipée par effet Joule:

$$P_j = \frac{1}{\sigma}\frac{h}{\pi R^2}\left(j.\pi R^2\right)^2 = \frac{j^2 \pi R^2 h}{\sigma} = -P$$

On a donc effectué un bilan d'énergie: la puissance fournie par le champ électromagnétique pour maintenir le courant constant est entièrement dissipée par effet Joule.