

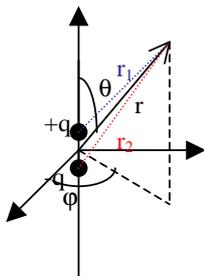
LP 31 Propriétés et applications Du rayonnement dipolaire électrique

Intro: Nous avons étudié précédemment la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou dans les milieux matériels, mais sans nous préoccuper de leur production par des charges en mouvement.

Ici nous allons étudier un système simple mais important : le rayonnement dipolaire électrique. Ce système est fondamental, car il permet de donner une interprétation du rayonnement électromagnétique à partir du mouvement d'oscillation de charges électriques. Par ailleurs, il permet également de comprendre les aspects de la diffusion, dont la conséquence la plus commune est la couleur bleue du ciel, ainsi que le fonctionnement des antennes.

A) Etude du rayonnement du dipôle:

1) Potentiels créés par le dipôle:



Le potentiel vecteur créé par cette distribution de courant vaut:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_z \int_{-a}^a \frac{i \left(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} \right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{r}'$$

où \vec{r} est le point où l'on calcule le potentiel et \vec{r}' la position du point courant le long de la distribution de courant.

Dans toute la suite on supposera $r \gg a$.

On a, dans le cadre de cette approximation, à l'ordre zéro pour le potentiel vecteur:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} a \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \vec{e}_z$$

Or on a $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{a} \right) = \frac{1}{a} \overset{\circ}{p}$, où p est le module du moment dipolaire $\vec{p} = q\overline{NP}$.

On tire de ceci que:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overset{\circ}{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \vec{e}_z}$$

Pour calculer V , on dispose de la jauge de Lorentz $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\text{Or } \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{z}{r} = -\frac{1}{C^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\text{Donc } V = -C^2 \cos \theta \int \frac{\partial A}{\partial r} dt = -\frac{\cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \int \left[\frac{-\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2} - \frac{\overset{\circ\circ}{p}(t-r/c)}{rc} \right]$$

Et finalement, après intégration:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[\frac{p(t-r/c)}{r^2} + \frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{rc} \right]$$

2) Champ électromagnétique créé par le dipôle:

On a directement le champ magnétique par $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$

On a donc, en coordonnées cartésiennes:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

$$B_y = -\frac{x}{r} \frac{\partial A}{\partial r}$$

$$\text{d'où } \vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \left(-\frac{y}{r} \vec{e}_x + \frac{x}{r} \vec{e}_y \right)$$

$$\text{Or on a } \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \begin{vmatrix} 0 & x/r & -y/r \\ 1 & y/r & x/r \\ 0 & z/r & 0 \end{vmatrix} = \sin\theta \vec{e}_\phi$$

On a donc $\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \sin\theta \vec{e}_\phi$ et enfin

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{1}{r^2} \overset{\circ}{p}(t-r/c) + \frac{1}{rc} \overset{\circ\circ}{p}(t-r/c) \right]$$

On tire alors \vec{E} de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Soit

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[-\frac{2p(t-r/c)}{r^3} - \frac{2\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2 c} - \frac{\overset{\circ\circ}{p}(t-r/c)}{rc^2} \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \cos\theta \frac{\overset{\circ\circ}{p}(t-r/c)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos\theta \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2 c} \right] \end{aligned}$$

De même on calcule:

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2 c} + \frac{\overset{\circ\circ}{p}(t-r/c)}{rc^2} \right]$$

Finalement on a comme expression

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\cos\theta \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2c} \right] \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\overset{\circ}{p}(t-r/c)}{r^2c} + \frac{\overset{\circ\circ}{p}(t-r/c)}{rc^2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait à présent l'hypothèse que $r \gg \lambda$. Cette approximation est plus forte que $t - \frac{r'}{c} = t - \frac{r}{c}$ car on a $|r - r'| \ll a \Leftrightarrow |(t - r/c) - (t - r'/c)| \ll a/c$ donc si $a/c \ll T$, on peut négliger le décalage. Or $\frac{a}{c} \ll T \Leftrightarrow a \ll cT \Leftrightarrow a \ll \lambda$.

Cette approximation permet alors de définir trois domaines dont la *zone de rayonnement*, par opposition à la zone statique.

En effet, si on suppose que $p(t) = p_0 \cos \omega t$, on a:

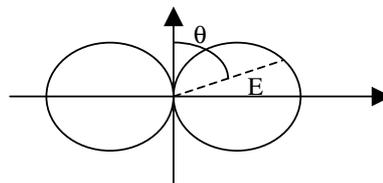
Zone statique	Zone intermédiaire	Zone de rayonnement
$r \ll \lambda$	$r \approx \lambda$	$r \gg \lambda$
$\frac{p}{r^3} \approx \frac{p_a}{r^3}$	$\frac{\overset{\circ}{p}}{r^2c} \approx \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)$	$\frac{\overset{\circ\circ}{p}}{rc^2} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2$

Dans le cadre de cette approximation, on a alors:

$$\vec{E} = \frac{\overset{\circ\circ}{p}}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta ; \vec{B} = \frac{\mu_0 \overset{\circ\circ}{p}}{4\pi rc} \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \vec{e}_\phi$$

On remarque donc les propriétés suivantes :

- \vec{E} et \vec{B} varient en $\frac{1}{r}$, ce qui les différencie du champ électromagnétique créé par un dipôle statique où les champs varient en $\frac{1}{r^3}$.
- $\vec{E} \perp \vec{B}$ et $\vec{B} = \left(\frac{\vec{e}_r}{c} \right) \wedge \vec{E}$ donc le champ électromagnétique a une structure locale d'onde plane de direction de propagation \vec{e}_r .
- \vec{E} et \vec{B} sont en phase.



3) Aspect énergétique:

Le vecteur de Poynting s'écrit pour le rayonnement dipolaire:

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{16\pi^2 r^2 c^3} p^{\circ\circ 2} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

D'où on tire la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting, en régime sinusoïdal:

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{r} \right)^2 \vec{e}_r$$

Ainsi, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut:

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$$

Et en remaniant quelque peu l'expression:

$$\langle P \rangle = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2} \frac{I_m^2}{2}, \text{ avec } I_m = \frac{\omega \cdot p_0}{a}$$

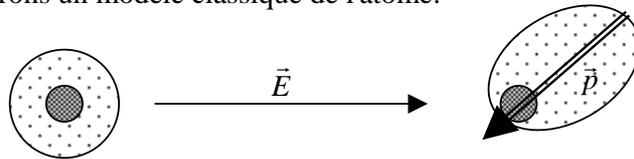
On définit alors la résistance au rayonnement par

$$R_r = 2 \frac{\langle P \rangle}{I_m^2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2} = 790 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

B) Conséquences et applications:

1) Diffusion atomique:

Considérons un modèle classique de l'atome:



On interprète le phénomène de diffusion par un modèle de l'électron élastiquement lié dans lequel un électron atomique est soumis à une force de rappel de la forme $-m_e \omega_0^2 \vec{r}$ et à une force de frottement visqueux $-\alpha \frac{d\vec{r}}{dt}$ et enfin à la force de Lorentz $-e.E_m e^{-i\omega t}$ due au champ électrique incident.

On a donc, en projection suivant O_z , direction de polarisation du champ incident:

$$m_e \ddot{z} = -m_e \omega_0^2 z - \alpha \dot{z} - e.E_m e^{-i\omega t}$$

Soit $\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m_e} E_m e^{-i\omega t}$, où $\tau = \frac{m_e}{\alpha}$

D'où on tire directement

$$z = \frac{-e E_m}{m_e \left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{i\omega}{\tau} \right]} e^{-i\omega t}$$

$$\dot{p} = \frac{-e^2 \vec{E}_m}{m_e \left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{i\omega}{\tau} \right]} e^{-i\omega t}$$

La puissance rayonnée s'écrit alors:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 |p_0(\omega)|^2}{3c^3} = \frac{e^4 E_m^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3 m_e \left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{i\omega}{\tau} \right]}$$

soit donc $\langle P \rangle = \sigma(\omega) \frac{1}{c} \frac{E_m^2}{2\mu_0} = \sigma(\omega) |\vec{R}|$, avec $\sigma(\omega) = \frac{8\pi r_c^2}{3} \left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \right]$ et

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \text{ grandeur appelée rayon classique de l'électron.}$$

Remarque: dimensionnellement, on a $[\sigma] = L^2$. C'est la section efficace de rayonnement : c'est la fraction de la puissance par unité de surface empruntée au champ incident.

Application: pour le ciel, on a $\omega \ll \omega_0$ car $\nu_0 \cong 10^{17} \text{ Hz}$ et $\nu_{\text{vis}} \cong 10^{14} \text{ Hz}$, donc l'expression de la section efficace de rayonnement se réduit à:

$$\sigma(\omega) = \frac{cste}{\lambda^4}.$$

Le phénomène de diffusion est donc plus fort dans les courtes longueurs d'ondes (bleu), ce qui explique la couleur du ciel. Par ailleurs, la couleur rouge du soleil couchant provient du même phénomène. Lorsque la lumière solaire a traversé une grande épaisseur d'atmosphère (soleil couchant en incidence rasante), il a plus diffusé dans le bleu que dans le rouge, et donc la lumière transmise contient plus d'intensité dans le rouge que dans le bleu.

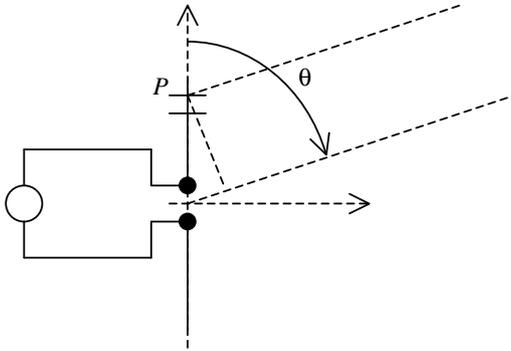
2) Antennes:

Une antenne peut-être considérée comme une assemblée de petits dipôles oscillants.

En remaniant un peut l'expression du champ électrique rayonné par un dipôle en régime sinusoïdal, on obtient que $\vec{E} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)} \frac{I_m a \sin \theta}{2\lambda r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \vec{e}_\theta$, avec $I_m = \frac{\omega \cdot p_0}{a}$, intensité maximale.

Pour un petit dipôle de longueur dz , dans le cas usuel des antennes rectilignes, on a alors:

$$d\vec{E} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)} \frac{i(z) dz \sin \theta}{2\lambda \cdot PM} e^{-i\omega\left(t-\frac{PM}{c}\right)} \vec{e}_\theta$$



Or on a

$$PM = \sqrt{(r^2 + OP^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{OP})}$$

$$\approx r - \vec{e}_r \cdot \vec{OP}$$

Et donc, pour le champ électrique:

$$\vec{E} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)} \frac{\sin \theta}{2\lambda \cdot r} e^{-i\omega\left(t-\frac{Pr}{c}\right)} \vec{e}_\theta \int i(z) e^{-i2\mu \cdot z} dz$$

$$\text{avec } u = \frac{\cos \theta}{\lambda}$$

On voit donc que l'on retrouve le champ électromagnétique produit par un dipôle unique centré en O multiplié par la transformée de Fourier spatiale de $i_m(z)$, $\hat{i}(u)$

Si on étudie alors le cas important des antennes demi-onde, c'est-à-dire les antennes de longueur $l = \frac{\lambda}{2}$ dans laquelle $i(z) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$, on trouve:

$$\hat{i}(u) = -\frac{I_m \lambda}{\pi} \left[\frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{\cos \theta}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right] \text{ et donc comme expression de } \vec{E} :$$

$$\vec{E} = -\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)} \left(\frac{I_m}{2\pi r} \right) \frac{\cos\left(\pi \frac{\cos \theta}{2}\right)}{\sin \theta} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \vec{e}_\theta$$

Exprimons le vecteur de Poynting, puisque l'onde est localement plane:

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{c\mu_0} \langle E^2 \rangle \vec{e}_r = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \left(\frac{I_m^2}{r} \right) \frac{\cos^2\left[\pi \frac{\cos \theta}{2}\right]}{\sin^2 \theta} \vec{e}_r$$

Si on calcule alors le flux de ce vecteur à travers une surface sphérique de centre O et de rayon r , on a:

$$\langle P \rangle = \oiint \langle \vec{R} \rangle d\vec{S} = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 c} I_m^2 \pi \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\pi \cdot \frac{\cos \theta}{2}\right)}{\sin \theta} d\theta$$

Qui donne numériquement:

$$\boxed{\langle P \rangle = 36,5 I_m^2}$$

Soit une résistance au rayonnement $R_r = 73 \Omega$. Le rayonnement électromagnétique d'une antenne demi-onde est donc plus fort que celui d'un simple dipôle, d'où l'intérêt du système.

Ces antennes sont très utilisées dans l'émission radio par exemple, mais aussi dans les radars où elles sont plusieurs parcourues par un courant qui est déphasé d'une antenne sur l'autre. Ceci permet de réaliser une anisotropie du rayonnement qui est très utilisé dans les radars. La variation temporelle du déphasage permet par ailleurs de réaliser des radars "tournants" à grande vitesse, sans passer par une rotation mécanique du système.