

LP 32 Exemples simples de phénomènes de propagation unidimensionnels.
Ondes progressives, ondes stationnaires. Aspects énergétiques.

Introduction: Nous allons ici étudier dans la généralité les phénomènes de propagation ondulatoires, en partant tout d'abord de quelques exemples. L'étude que nous allons effectuer ici est très générale, puisque ces résultats vont s'appliquer tant aux ondes mécaniques (son, corde vibrant), qu'aux ondes électromagnétiques ou électriques.

Dans un premier temps nous considérerons quelques exemples où se manifeste ce caractère ondulatoire en montrant que l'équation régissant le comportement du système est similaire dans tous les cas.

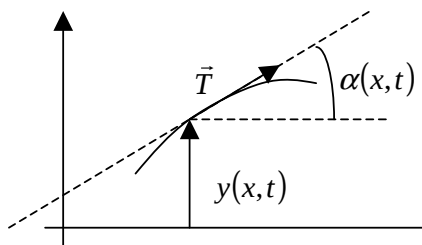
Ensuite nous effectuerons le traitement dans sa généralité, en faisant des retours fréquents sur les cas du départ, en particulier pour écrire dans les différents cas les grandeurs pertinentes. Nous mettrons donc en exergue le caractère ondulatoire des solutions, ainsi que les phénomènes énergétiques qui leur sont associés.

A) Exemples de systèmes propagatifs:

1) La corde vibrante:

On considère une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique constante μ , est tendue par une tension $\vec{T}$.

On étudie de part et d'autre de cette position d'équilibre les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy , en admettant qu'un élément de corde au repos reste à la même abscisse x à l'instant t . L'élongation est notée $y(x, t)$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$, qui reste petit, ce qui suppose $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$. Enfin on néglige l'action du champ de pesanteur et des frottements.



Un élément de longueur de la corde est alors donné par $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \cong dx^2 (1 + \alpha^2)$, car $\tan \alpha \cong \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Donc au premier ordre en α , on a $ds = dx$.

Ecrivons alors le principe fondamental de la dynamique pour un élément de longueur de la corde:

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx. \text{ Les tensions sont tangentes à la corde en leur point}$$

d'application, mais comme α reste petit, on peut considérer qu'elles sont alignées et tangentes à la corde au point d'abscisse x .

En projection sur Ox , on a $0 = \frac{\partial T_x}{\partial x}$, soit $T \cos \alpha = C^{ste}$, ce qui implique, toujours au premier ordre en α , que $T = C^{ste}$.

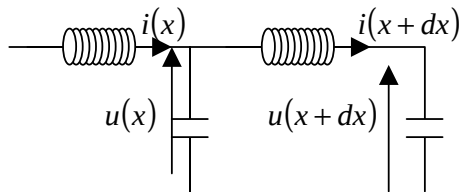
$$\text{En projection sur } Oy, \text{ on a } \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T \sin \alpha}{\partial x} = T \cos \alpha \frac{\partial \tan \alpha}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

On en déduit l'équation de propagation de la corde vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

2) Câble de transmission:

On considère à présent un câble coaxial, modélisé comme suit, avec une capacité par unité de longueur C et une inductance par unité de longueur L



La loi de nœuds donne:

$$i(x) = C dx \frac{\partial u}{\partial t} + i(x+dx), \text{ soit } \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t}$$

Et la loi des mailles donne:

$$u(x) = u(x+dx) + L dx \frac{\partial i}{\partial t}, \text{ soit } \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t}. \text{ En}$$

combinant les deux équations, on obtient l'équation de propagation de l'intensité, à savoir:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3) Ondes acoustiques:

On considère une tranche de fluide de masse dm contenues dans un tuyau.

Considérons donc une tranche de fluide, de section S et de masse dm . Nous nous placerons en formalisme eulérien, c'est-à-dire que toutes les grandeurs considérées seront fonction de x et de t .



Le volume de cette tranche de fluide au repos vaut $S dx$, et elle devient lorsqu'il y a eu un déplacement $S(x+dx+\Psi(x+dx,t) - (x+\Psi(x,t))) = S dx \left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$, puisque nous ne considérons dans l'approximation acoustique que des grandeurs au premier ordre (condition sur le volume).

$$\text{La dilatation relative s'écrit alors } \delta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Par ailleurs nous avons supposé les transformations isentropiques. Utilisons donc l'expression de la compressibilité isentropique:

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s. \text{ Comme toutes les grandeurs sont linéarisées, on a au premier ordre}$$

$$\chi_s = -\frac{1}{dV_0} \frac{dV - dV_0}{P - P_0} = -\frac{\delta(x,t)}{p(x,t)}. \text{ En utilisant l'expression de } \delta \text{ précédemment obtenue, on}$$

$$\text{tire que } p(x,t) = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \text{ reliant un déplacement de la tranche de fluide à la surpression.}$$

Appliquons ensuite le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide au mouvement. On a:

$$\rho_1(x,t)Sdx \frac{D^2\Psi}{Dt^2} = SP(\Psi(x,t)) - SP(\Psi(x+dx,t)).$$

Pour ne garder que des termes du premier ordre en toutes les grandeurs, on doit prendre:

- $\rho_1(x,t) = \rho_0$ puisque $\rho(x,t)dx$ est du second ordre
- $\frac{D^2\Psi}{Dt^2} = \frac{Dv_x}{Dx} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial t}$
- $P(\Psi(x,t)) = P_0 + p(\Psi(x,t)) = P_0 + p(x,t)$ et $P(\Psi(x+dx,t)) = P_0 + p(x+dx,t)$.

L'équation précédente devient alors, à l'ordre le plus bas:

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx, \text{ soit } \boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

En combinant ces deux relations, on arrive alors à l'équation de propagation:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

On constate donc que toutes les équations sont du même type: l'équation de d'Alembert, caractéristique d'un phénomène de propagation. Nous allons donc maintenant l'étudier.

B) Ondes progressives:

1) Solutions de l'équation de d'Alembert:

Nous voulons ici déterminer les solutions de l'équation de d'Alembert de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Effectuons le changement de variables $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$. Ces deux variables sont indépendantes et définies de manières univoques.

$$\text{On a } \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \right) \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \right), \text{ c'est à dire:}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \text{ De même on a:}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

$$\text{L'équation de d'Alembert s'écrit alors: } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{4}{c^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0}$$

Par intégration, on trouve donc immédiatement que f est de la forme:

$$f(u,v) = F(u) + G(v), \text{ soit } f(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

En fait, il est plus commode et plus explicite d'utiliser une forme avec les variables $A.u$ et $A.v$, sous la forme:

$$f(x,t) = F(\omega.t - kx) + G(\omega.t + kx), \text{ avec } \frac{\omega}{k} = c.$$

On appelle ω la *pulsation de l'onde* et k le nombre d'onde. Nous reviendrons bientôt sur leur contenu physique lorsque nous parlerons des OPPMS.

La fonction F représente une onde se *propageant* dans la direction des x croissants. En effet, considérons que la fonction F soit donnée par une fonction nulle partout sauf dans un intervalle $[0, \tau]$ de u , dans lequel elle a une allure triangulaire.

A $t = t_0$, le début du triangle se trouve en $x = ct_0$, et son autre extrémité en $x = ct_0 + c\tau = ct_0 + \delta$.

A un instant ultérieur t_1 , $x = ct_1$ pour le début et $x = ct_1 + \delta$ pour l'autre extrémité. Ainsi le triangle avance dans la direction des x croissants lorsque le temps s'écoule.

Inversement, la fonction G représente une onde se propageant selon la direction opposée.

Ces ondes sont donc appelées *ondes progressives*.

Par ailleurs, si on regarde une surface équiphase, ou *surface d'onde*, c'est-à-dire pour F les surfaces définies par $u = C^{ste}$, on s'aperçoit qu'à un instant donné cette surface est un plan normal à la direction de propagation. Ainsi les ondes sont appelées *ondes planes progressives*. Notons que ces surfaces se déplacent avec la vitesse c .

Enfin, ces ondes n'étant caractérisées que par une pulsation unique ω , on les appelle *ondes planes progressives monochromatiques*.

2) OPPM sinusoïdales:

Un cas particulier fondamental des OPPM sont les ondes de la forme:

$$F(x,t) = A \cos(\omega.t - k.x + \phi).$$

Représentons la à un instant t fixé. Il s'agit d'une sinusoïde dont la période *spatiale* vaut $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ et est appelée *longueur d'onde*. On voit alors que k représente une pulsation spatiale.

Par ailleurs, si on trace les variations de F à x fixé, ces variations ont l'allure d'une sinusoïde également, de période *temporelle* $T = \frac{2\pi}{\omega}$. ω représente donc bien une pulsation spatiale, et T est tout simplement appelée période de l'onde.

Ces ondes particulières ont un rôle fondamental puisque l'on sait que l'on peut décomposer toute fonction de la variable $u = \omega.t - kx$ en une somme discrète de sinusoïde:

$$F\left(t - \frac{x}{c}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega.t - nkx + \phi_n).$$

On comprend alors donc bien pourquoi l'étude détaillée des systèmes propagatifs dans le seul cas des OPPMS permet d'avoir accès au comportement de toute onde se propageant dans ce système, via cette décomposition, les équations étant linéaires.

Ainsi, dans les exemples de la première partie, on peut étudier:

- y sous la forme $y = y_0 \cos(\omega.t - k.x + \phi_y)$ ou en notation complexe $\underline{y} = y_0 e^{j(\omega.t - kx)}$.
- i sous la forme $i = i_0 \cos(\omega.t - k.x + \phi_y)$ ou en notation complexe $\underline{i} = i_0 e^{j(\omega.t - kx)}$
- v sous la forme $v = v_0 \cos(\omega.t - k.x + \phi_y)$ ou en notation complexe $\underline{v} = v_0 e^{j(\omega.t - kx)}$

3) Aspect énergétique:

De manière générale, on peut définir pour tout phénomène de propagation un vecteur $\vec{R}$ qui, comme nous allons le montrer, traduit la propagation de l'énergie. Nous allons voir son expression dans les trois cas abordés en introduction.

a) Corde vibrante.

Ici on définit $\vec{R} = -T_y \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x$. Pour déterminer la signification physique de $\vec{R}$, calculons $\text{div} \vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -T \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -T \left(\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$, soit $\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$. Le premier terme correspond à l'énergie cinétique par unité de longueur de la corde, et le second à son énergie potentielle par unité de longueur.

Ainsi la divergence de $\vec{R}$ traduit la *perte d'énergie de l'unité de longueur considérée*.

Par ailleurs, pour une onde progressive, l'équation de d'Alembert donne:

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$, soit $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu}{T}} \frac{\partial y}{\partial t}$, ce qui implique que pour une onde progressive $\vec{R} = Z \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$, avec $Z = \sqrt{\mu T}$, *impédance caractéristique du milieu*. Notons que Z dépend de la direction de propagation. En effet, pour une onde se propageant dans la direction des x décroissants, on aura $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\frac{\mu}{T}} \frac{\partial y}{\partial t}$, ce qui implique que $Z = -\sqrt{\mu T}$. Cette remarque est tout à fait générale, et on aura toujours $Z_{x+} = -Z_{x-}$.

On voit donc que si y est une onde progressive, alors $\vec{R}$ le sera aussi : il y aura propagation de l'énergie.

b) Ondes électriques:

Dans ce cas on a $\vec{R} = ui \vec{e}_x$ et on montre que $\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu^2 \right]$. L'impédance caractéristique vaut dans ce cas $Z = \frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, et on a $\vec{R} = Zi^2 \vec{e}_x$.

c) Ondes acoustiques:

Dans ce cas on a $\vec{R} = p \frac{\partial \Psi}{\partial t} \vec{e}_x = p \vec{v}$, et on montre que $\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2 \right]$. L'impédance caractéristique vaut alors $Z = \frac{p}{v} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$ et donc $\vec{R} = Zv^2 \vec{e}_x = Z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \vec{e}_x$.

Dans tous ces cas, le vecteur $\vec{R}$ traduit la propagation de l'énergie, et plus particulièrement son module correspond à la puissance transportée (par unité de surface pour les ondes

acoustiques) . De manière générale, ce que l'on mesure correspond en fait à la valeur moyenne puisque les variations temporelles de ce vecteur sont rapides devant la sensibilité du détecteur. On mesure donc:

- pour une OPPMS $\langle |\vec{R}| \rangle = \frac{Z f_0^2}{2}$
- pour une OPPM quelconque $\langle |\vec{R}| \rangle = Z \left\langle \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - nk.x) \right]^2 \right\rangle = Z \left(c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \right)$,
d'après le théorème de Parseval.

C) Ondes stationnaires:

1) Réflexion sur un obstacle:

Supposons qu'une OPPM se propage dans un milieu d'impédance Z_1 et rencontre sur son chemin un changement brutal de milieu, passant à l'impédance Z_2 . Ce changement de milieu va donner naissance, en plus de l'onde progressive normale, à une onde transmise et une onde réfléchie, et on peut montrer que le coefficient de réflexion en amplitude vaut $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$

2) Ondes stationnaires:

Etudions alors le comportement d'une onde plane monochromatique sinusoïdale dans le cas où $r < 0$. Dans le milieu 1, l'onde totale va s'écrire:

$$f(x, t) = f_0 \cos(\omega t - kx + \phi) - |r| f_0 \cos(\omega t + kx + \phi). \text{ Ceci s'écrit encore:}$$

$$\begin{aligned} f(x, t) &= |r| f_0 [\cos(\omega t - kx + \phi) - \cos(\omega t + kx + \phi)] + (1 - |r|) f_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \\ &= 2|r| f_0 \sin(k.x) \sin(\omega t + \phi) + (1 - |r|) f_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \end{aligned}$$

Il apparaît alors deux types d'ondes:

- une OPPMS "classique"
- une onde dont les variables temporelles et spatiales sont découplées. On l'appelle *onde stationnaire*, puisque si l'on trace son allure, elle ne bouge pas.

On définit alors un *taux d'ondes stationnaires* par le rapport des amplitudes de ces deux ondes, soit $TOS = \frac{2|r|}{1 - |r|}$.

Dans le cas très courant où $r = -1$, c'est-à-dire:

- pour la corde lorsqu'elle est attachée
- pour le câble lorsqu'il est en circuit ouvert
- pour les ondes acoustiques lorsque le tuyau est fermé,

on obtient une onde purement stationnaire d'expression $f(x, t) = 2 f_0 \sin(k.x) \sin(\omega t + \phi)$, et le taux d'ondes stationnaires est infini. L'onde ne se propage plus. Plus précisément, on observe en des points des *nœuds* de vibration $(kx + \phi) = n\pi$, et en d'autres des *ventres* de vibration $(kx + \phi) = \frac{2n+1}{2} \pi$.

3) Aspect énergétique:

Pour une onde stationnaire, le résultat $\vec{R} = Z f^2 \vec{e}_x$ n'est plus valable, puisque la définition de Z ne peut être faite. En effet, sa valeur est différente selon que l'on considère Z_{x+} ou Z_{x-} .

Par conséquent il faut revenir à la définition primitive de $\vec{R}$ dans chacun des cas. Nous allons ici faire l'étude de l'aspect énergétique dans le cas du câble coaxial, cette étude pouvant être facilement généralisée à tous les systèmes.

Intuitivement, on sent que l'énergie ne va pas se propager dans le cas d'onde stationnaire, puisqu'il existe des endroits où elle va être en permanence nulle. Montrons le analytiquement:

Pour les ondes électriques, on aura

$$i(x, t) = i_0 \cos(\omega t - kx + \phi) - i_0 \cos(\omega t + kx + \phi). \text{ Or on a toujours la relation } \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t},$$

ce qui s'écrit $-C \frac{\partial u}{\partial t} = ki_0 \sin(\omega t - kx + \phi) + ki_0 \sin(\omega t + kx + \phi)$, et donc:

$$u = \frac{ki_0}{C\omega} [\cos(\omega t - kx + \phi) + \cos(\omega t + kx + \phi)] = 2Z_{x+} i_0 \cos(\omega t + \phi) \cos kx, \text{ tandis que l'on a:}$$

$$i(x, t) = 2i_0 \sin(kx) \sin(\omega t + \phi).$$

Ainsi les deux ondes stationnaires sont en *opposition de phase*: les ventres de tension se situent au niveau des nœuds d'intensité et inversement.

Le vecteur de propagation de la puissance s'écrit alors: $\vec{R} = ui \vec{e}_x = 4i_0^2 Z_{x+} \sin kx \cos kx \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)$, et on voit immédiatement que sa valeur moyenne est nulle. L'énergie reste donc localisée dans des zones bien définies de l'espace.

Cependant, il se passe quand même quelque chose du point de vue énergétique. En effet, considérons les densités d'énergies linéiques que nous avons vu apparaître:

$$u_L = \frac{1}{2} Li^2 = 2i_0^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t + \phi) \text{ et}$$

$$\text{et } u_C = \frac{1}{2} Cu^2 = 2CZ_{x+}^2 i_0^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t + \phi) = 2Li_0^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t + \phi), \text{ et on voit}$$

alors immédiatement qu'il y a un transfert permanent d'énergie entre les condensateurs et les inductances.

Ceci se généralise aisément aux autres dispositifs propagatifs:

- dans la corde vibrante il y aura un transfert permanent de l'énergie cinétique linéique vers l'énergie potentielle linéique
- dans les ondes acoustiques un transfert permanent de l'énergie cinétique volumique à l'énergie potentielle volumique.