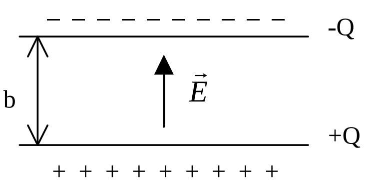
LP 38 Etude macroscopique de la polarisation,
du champ **E** et du vecteur **D** dans les milieux diélectriques

## A) Condensateurs:

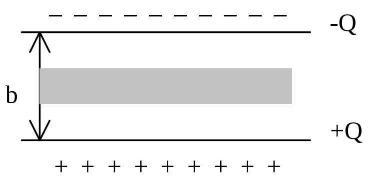
### 1) Conducteur

Considérons un conducteurs chargé isolé. Il porte sur ces armatures, distante de $b$ et de surface $A$ une charge $Q$.




Le calcul de $\vec{E}$ se fait par le théorème de Gauss et on obtient que $\vec{E} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\vec{u}_x$ et que la différence de potentiel vaut $V_+ - V_- = \int \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}b$. On en déduit la capacité du condensateur plan $C = \frac{\varepsilon_0 A}{b}$

Supposons maintenant que l'on introduise un métal à l'intérieur du condensateur:

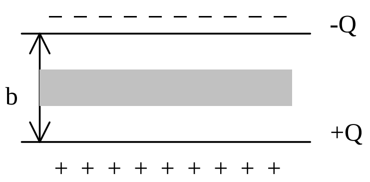



Le champ électrique dans le métal n'a pas changé, ainsi que le champ à l'extérieur toujours calculable par le théorème de Gauss. On a donc $V_+ - V_- = \frac{Q}{A\varepsilon_0}(b-e)$, ce qui donne une nouvelle capacité $C' = \frac{\varepsilon_0 A}{(b-e)}$.

L'introduction d'un métal a donc pour conséquence physique d'annuler le champ électrique dans la région de l'espace où il se trouve, modifiant ainsi la capacité du condensateur.

### 2) Diélectrique

On introduit à présente un diélectrique entre les armatures du condensateur, à charge constante.



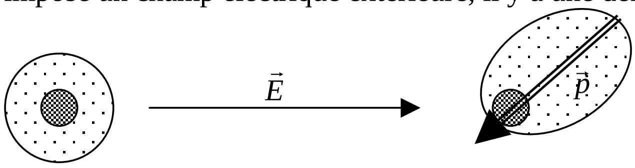

L'introduction du diélectrique a pour effet de diminuer le champ total dans la zone où il se trouve, ce qui a pour conséquence d'augmenter la capacité.

Nous allons à présent étudier ceci plus quantitativement.

B) Polarisation d'un diélectrique

1) Définitions

Un diélectrique est un corps où les charges sont liées. C'est donc un isolant. Lorsque l'on impose un champ électrique extérieure, il y a une déformation des nuages électroniques.

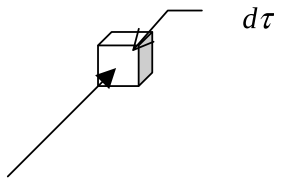



Cette déformation fait que chaque atome ou molécule va être équivalent à un petit dipôle.

Considérons à présent un échantillon du diélectrique dont la taille doit être:

- très inférieure à la taille de l'échantillon pour avoir en son sein des grandeurs uniformes
- très grande devant la taille des atomes, ceci pour pouvoir travailler sur des grandeurs moyennées

Cette cellule sera repérée par la position de son centre $\vec{r}$




On définit alors un vecteur polarisation au point $\vec{r}$ par:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\sum \vec{p}_{at}}{d\tau}$$

L'ensemble de ces dipôles va créer un champ électrique qui va se rajouter au champ électrique extérieur $\vec{E}_0$ et qui constitue la réponse du diélectrique à un champ électrique. Le champ total s'écrira donc:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \vec{E}_d$$

2) Calcul du champ créé par les dipôles:

On sait que le potentiel créé par un dipôle élémentaire vaut: $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}(Q)\vec{u}}{QM^2}$.

Le potentiel créé par l'ensemble du diélectrique vaudra donc:

$$V_d(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\frac{\vec{P}(Q)d\tau.\vec{u}}{QM^2}$$

Or on sait que $\frac{\vec{u}}{QM^2} = \overrightarrow{grad}_Q\left(\frac{1}{QM}\right)$. On a donc

$$V_d(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\vec{P}.\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{QM}\right)d\tau$$

De plus on a, pour tout vecteur et tout scalaire $div(a.\vec{A}) = a div\vec{A} + \vec{A}.\overrightarrow{grad a}$ et donc ici

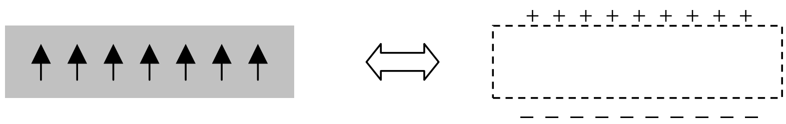
$V_d(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\left[div_Q\left(\frac{\vec{P}(Q)}{QM}\right) - \frac{1}{QM}div_Q\vec{P}\right]d\tau$, ce qui s'écrit grâce au théorème de Green Ostrogradsky:

$$\boxed{V_d(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{\Sigma}\frac{\vec{P}(Q)d\vec{S}}{QM} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{diel}\frac{1}{QM}div_Q\vec{P}d\tau}$$

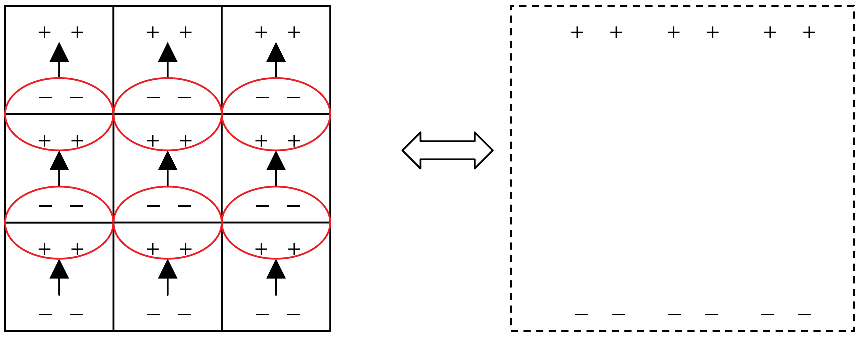
On voit alors que les dépendances en $QM$ sont en inverse et donc que ce potentiel est rigoureusement équivalent au potentiel créé par:

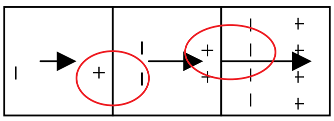
- pour le premier terme une surface chargée avec $\sigma = \vec{P}.\vec{n}$
- pour le second terme un volume chargé avec $\rho = -div\vec{P}$

Ceci signifie que l'on peut décrire un diélectrique polarisé de deux manières différentes:



On peut retrouver ce résultat qualitativement. Considérons pour cela un échantillon de diélectrique tout d'abord uniformément polarisé et divisons le en cellules mésoscopiques:





On a $div\vec{P} > 0$ et donc bien $\rho < 0$. Cependant, la question que l'on se pose est si ces charges sont physiquement réelles. En fait, il ne s'agit que d'une description très pratique, mais rien de plus. Signalons seulement qu'il existe une description similaire en magnétisme.

## C) Equations de Maxwell dans les diélectriques

### 1) Champ moyennés dans la matière:

Les équations de Maxwell sont valables au niveau macroscopique avec des grandeurs locales:

$$div\vec{b} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$
$$\text{et}$$
$$div\vec{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{b} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}\right)$$

Au niveau de la matière, on considère des champs moyennés macroscopique donnés par $\vec{B} = \langle \vec{b} \rangle$ et $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$, ainsi que $\rho = \langle \rho_{micro} \rangle$ et $\vec{j} = \langle \vec{j}_{micro} \rangle$. Ce faisant, on coupe les hautes fréquences spatiales pour ne garder que des variations à l'échelle macroscopique. Ceci n'est possible que parce que les équations de Maxwell sont linéaires.

### 2) Equations de Maxwell:

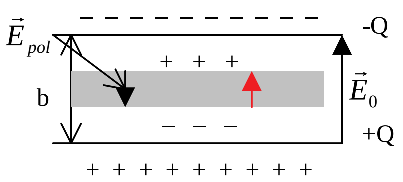
Dans un milieu diélectrique, en se servant de la description des charges équivalentes, on a: $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho_{libres} + \rho_{pol}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{libres} - div\vec{P}\right)$. On définit alors un vecteur $\vec{D}$ par $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. L'équation de Maxwell – Gauss s'écrit alors, dans un milieu diélectrique,

$$\boxed{div\vec{D} = \rho_{libres}}$$

De même, on définit un courant de polarisation $\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t}$, et l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$

### 3) Un premier retour sur le condensateur plan:

Reprenons le condensateur plan du début entre les armatures duquel on a placé un barreau diélectrique. L'application du champ électrique au diélectrique va entraîner l'apparition de charges sur les faces du diélectrique.




D'après l'étude précédente, ceci est équivalent à l'apparition d'un vecteur polarisation uniforme. Par ailleurs, l'apparition de ces charges va entraîner l'apparition d'un champ électrique de sens opposé à celui de $\vec{E}_0$. Le champ électrique total dans le diélectrique va donc être diminué et ceci va conduire, conformément au raisonnement fait en introduction, à une augmentation de la capacité. Cependant, on ne peut à ce stade déterminer quantitativement cette augmentation de capacité. En effet, il nous faut connaître la réponse du matériau à un champ électrique extérieur. C'est ce que nous allons voir maintenant.

### 4) Relations phénoménologiques:

Cependant, les relations de Maxwell ne permettent pas de déduire tous les résultats de la matière. Il manque en effet une équation, caractérisant la réponse de la matière à une excitation électrique (comme la loi d'Ohm pour un conducteur).

Celle-ci s'écrit, si la réponse est linéaire,

$\vec{P} = \varepsilon_0[\chi]\vec{E}(\vec{r})$, où le champ électrique est le champ total $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol}$, et où $[\chi]$ s'appelle le tenseur de susceptibilité électrique. Si le milieu est homogène, alors ce tenseur ne dépend pas de la position et s'il est isotrope, il se réduit à une constante. Dans un milieu LHI, on a alors:

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}}$$

Le vecteur $\vec{D}$ est alors donné par $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$, où $\varepsilon_r$ est appelé permittivité diélectrique relative.

Valeurs numériques : BFR p.269

### 4) Ultime retour sur le condensateur:

Nous sommes maintenant armés pour déterminer l'augmentation de capacité. Pour illustrer l'équivalence des deux descriptions ( avec $\square$ et $\vec{D}$ dans le milieu et charges partielles dans le vide), nous allons déterminer le champ électrique à l'intérieur du diélectrique de deux manières.

Plaçons nous tout d'abord dans la description utilisant les charges. L'application du champ électrique entraîne l'apparition de charges liées à $\square$ par $\sigma_{pol} = P$, et la relation phénoménologique va donc s'écrire $\sigma_{pol} = \varepsilon_0 \chi \left\|\vec{E}\right\|$. Le champ électrique en dehors du diélectrique est toujours inchangé et vaut $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$. Si on applique le théorème de Gauss à un volume carré englobant les charges de polarisation, on a:

$E_0 S - ES = \frac{\sigma_{pol} S}{\varepsilon_0}$, soit $\frac{\sigma_{pol}}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{\chi}\right) = E_0$. On en déduit le champ à l'intérieur du diélectrique: $E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

On aura alors $V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(b - e + \frac{e}{\varepsilon_r}\right) = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\left(b - e + \frac{e}{\varepsilon_r}\right)$. La capacité va donc valoir $C_{diel} = \frac{A\varepsilon_0}{b - e + e/\varepsilon_r}$. Si le diélectrique remplit tout le condensateur, on a le résultat classique

$$\boxed{C_{diel} = \frac{A_0}{b}\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_r C}$$

Si on se place à présent dans une description en terme de milieu, le théorème de Gauss nous dit, en utilisant l'équation de Maxwell – Gauss:

$D_0 S - D_{diel} S = 0$ (il n'y a dans cette description pas de charges surfaciques. Il faut de manière générale bien prendre garde à ne pas mélanger les deux descriptions). Or on a $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ et $D_{diel} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ et donc $\square$. On retrouve le même champ et donc la même capacité.

### 5) Applications:

#### a) Approche sommaire de la dilution:

Si on considère deux charges opposées $+q$ et $-q$ dans un liquide, milieu diélectrique (pour l'eau, $\varepsilon_r = 80$). Le champ créé par une charge au niveau de l'autre va s'écrire:

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r}\vec{u}$, et donc la force attractive va être $\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\vec{u} = \frac{\vec{F}_{vide}}{\varepsilon_r}$. La force attractive va donc être beaucoup moins intense que dans le vide, ceci constituant une première explication de la dissolution des composés ioniques. En fait, c'est l'explication pour les composés ioniques atomiques.

b) Orientation et déplacement d'une boule diélectrique

Plaçons une petite sphère d'un matériau diélectrique dans un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$. Dans un premier temps, celle-ci va se polariser, donnant naissance à un vecteur polarisation volumique $\vec{P} = \chi\vec{E}$. Si la sphère est suffisamment petite, on peut considérer que la polarisation y est uniforme et qu'elle se comporte du point de vue du champ électrique comme un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = \chi\vec{E}.V$.

L'énergie potentielle de ce dipôle dans ce champ va s'écrire:

$E_p = -\chi VE^2$.

En conséquence, si le champ n'est pas uniforme, la sphère va se déplacer vers les zones de champ de module fort, indépendamment de son signe.