

LP 40 Dispersion et absorption d'une OPPM  
dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.

Introduction: nous avons fait l'étude de la propagation des ondes dans le vide, et plus particulièrement de l'onde plane progressive. A cette occasion, nous avons défini une vitesse de propagation dans le vide  $c$ .

Ici nous allons nous intéresser à la propagation dans un milieu diélectrique et étudier les propriétés de cette propagation, en particulier la dispersion et l'absorption. Nous définirons par ailleurs une vitesse de groupe et une vitesse de phase pour l'onde considérée. Enfin nous modéliserons les phénomènes microscopiques qui sont à l'origine de ces phénomènes.

A) Ondes dans un milieu diélectrique:

1) Position du problème:

Nous allons nous intéresser à la propagation d'une onde plane progressive monochromatique dans un milieu diélectrique, que nous représenterons en notation complexe par  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ .

En ce qui concerne le milieu, nous supposons qu'il est un très bon isolant, c'est-à-dire qu'il n'existe en son sein aucune charge libre, et par ailleurs nous le supposons également non magnétique, c'est-à-dire  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ .

Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

La relation constitutive du milieu s'écrit, pour un milieu *linéaire*:

$$\vec{D} = [\varepsilon(\vec{r}, \omega)] \vec{E}.$$

Dans le cas d'un milieu homogène, on a

$$\vec{D} = [\varepsilon(\omega)] \vec{E}$$

Si de plus il est isotrope:

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}$$

Nous nous placerons dans toutes la suite dans un tel milieu.

Avec ces hypothèses les équations de Maxwell se réécrivent, en utilisant la notation intermédiaire  $\vec{X}_\omega = \vec{X} e^{-i\omega t}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_\omega &= 0 & \operatorname{div} \vec{B}_\omega &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_\omega - i\omega \vec{B}_\omega &= 0 & \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}_\omega + i\omega \varepsilon \mu_0 \vec{E}_\omega &= 0 \end{aligned}$$

Formellement, ce jeu d'équation est le même que celui caractérisant une propagation dans le vide, en remplaçant  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon$ . L'équation de propagation va alors s'écrire:

$$\boxed{\Delta \vec{E}_\omega + \omega^2 \varepsilon \mu_0 \vec{E}_\omega = \vec{0}}$$

En fait, toute la spécificité du problème va provenir, comme on s'en doute un peu, de  $\varepsilon$  qui peut à priori dépendre de  $\omega$  et qui caractérise les propriétés diélectriques du milieu.

2) Structure de l'onde dans un milieu diélectrique, absorption:

Cherchons des solutions à l'équation de propagation sous la forme d'OPPM, avec  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$  et  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ .

Tout d'abord, si on injecte cette forme dans l'équation de propagation, on obtient:

$$-k^2 + \omega^2 \epsilon \mu_0 = 0, \text{ ou plutôt } \boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu_0}, \text{ qui constitue la relation de dispersion.}$$

Par ailleurs, la relation de Maxwell Faraday s'écrit, en notation complexe:

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}, \text{ et donc, en désignant par } \vec{u} \text{ la direction de propagation de l'onde telle que } \vec{k} = k\vec{u}, \text{ on a: } \boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{u} \wedge \vec{E}}$$

Formellement, on a donc également une structure d'onde plane progressive dans le milieu. Il faut cependant faire attention au fait que  $k$  peut être complexe, ce qui change la structure de l'onde plane.

a) Cas d'un milieu non absorbant:

Plaçons nous tout d'abord dans le cas d'un milieu non absorbant, c'est-à-dire comme nous le verrons plus avant, à un milieu où  $\epsilon(\omega)$  est réel. Il en est alors de même pour  $k$  et la relation de dispersion s'écrit:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}, \text{ où } \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$

$$\text{La vitesse de phase de l'onde s'écrit alors } v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Pour les milieux transparents dans le domaine optique ou infrarouge, la permittivité diélectrique relative est supérieure à 1. La comparaison avec la définition de l'indice en optique mène à effectuer l'identification

$$\boxed{n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}}$$

$$\text{La longueur d'onde de l'onde s'écrit alors } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \left( \frac{2\pi \cdot c}{\omega} \right) \frac{1}{n} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Ainsi la longueur d'onde d'une onde n'est pas une grandeur absolue: elle dépend du milieu dans lequel se propage l'onde.

En résumé, dans un milieu non absorbant, une OPPM se propage sans absorption avec une vitesse de phase qui dépend de la fréquence. Sa structure est en tout point identique à celle

$$\text{d'une OPPM dans le vide. La relation entre } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ s'écrit alors } \boxed{\vec{B} = \frac{n}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E})}$$

b) Cas d'un milieu absorbant:

Le fait qu'un milieu soit absorbant se traduit dans le formalisme complexe par le fait que  $\epsilon_r(\omega)$  présente une partie imaginaire non nulle:  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . Nous expliquerons cette particularité lors de l'interprétation microscopique.

Pour satisfaire la relation de dispersion,  $k$  doit être complexe. Posons alors  $k = k' + ik''$ , ce qui conduit aux relations  $k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon'$  et  $2k'k'' = \omega^2 \mu_0 \epsilon''$ .

Choisissons alors  $k'$  positif, c'est-à-dire que nous choisissons que l'onde se propage selon la direction de  $\vec{u}$ . La deuxième relation nous indique que  $k''$  est alors positif si  $\epsilon''$  l'est.

Le champ électrique de l'OPPM s'écrit alors:

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)}$ , et on remarque immédiatement que l'onde s'atténue au fur et à mesure que l'onde se propage, ce qui justifie les termes d'absorption et de milieu absorbant. Notons qu'une valeur négative de  $\epsilon''$  conduirait à une amplification, se qui se produit dans certains milieux, comme par exemple les lasers.

En terme d'indice complexe, les relations  $k = n \frac{\omega}{c}$  sont toujours valables, ce qui permet d'exprimer:

- l'indice de réfraction  $n'$  par  $n' = \frac{ck'}{\omega}$
- l'indice d'extinction par  $n'' = \frac{ck''}{\omega}$ , puisque l'onde s'amortit en  $e^{-n''\omega x/c}$ .

### 3) Aspect énergétique:

Comme dans le vide, la propagation de l'énergie est donnée par le vecteur de Poynting, dont l'expression générale dans un milieu matériel est  $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ . Comme ici on a supposé le milieu non magnétique, on retrouve l'expression que l'on avait dans le vide  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

Or on a, en notation réelles,  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k'x - \omega t + \varphi)$  et  $\vec{B} = \text{Re} \left( \frac{n}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \right)$ , soit

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}_0) \text{Re} \left[ (n' + in'') e^{-k''x} e^{i(k'x - \omega t)} \right]$$

$$= \frac{1}{c} (\vec{u} \wedge \vec{E}_0) e^{-k''x} [n' \cos(k'x - \omega t + \varphi) - n'' \sin(k'x - \omega t + \varphi)]$$

On en déduit le vecteur de Poynting  $\vec{R} = \vec{u} c \epsilon_0 E_0^2 e^{-2k''x} (n' \cos^2(\dots) - n'' \sin(\dots) \cos(\dots))$ , ce qui donne en moyennant:

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \vec{u} c n' \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} e^{-2n'' \frac{\omega}{c} x}$$

Cette expression nous montre que le flux énergétique de l'onde décroît exponentiellement avec la distance parcourue, avec un coefficient d'extinction  $2k''$ , l'énergie étant transférée à la matière sous forme d'échauffement par exemple (c'est le principe de fonctionnement d'un micro-ondes). Cette expression est tout aussi valable en milieu non absorbant, où on constate que le vecteur de Poynting à la même expression que dans le vide, à facteur  $n$  près.

### 4) Dispersion et vitesse de groupe:

Nous avons dit à plusieurs reprises que la permittivité diélectrique dépendait de la pulsation  $\omega$ , mais ceci n'a pas eu l'air d'avoir beaucoup d'incidence dans nos calculs. Ceci est assez évident étant donné que nous nous sommes limités à une onde monochromatique jusqu'à présent.

Pour l'OPPM, nous avons parlé de vitesse de phase, définie par  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ . Cette grandeur s'appelle vitesse de phase car elle indique que si on veut qu'en un point mobile la phase soit constant, il vaut que  $d\phi = 0 = kdx - \omega dt$ , soit  $v_\phi = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\phi=C^{ste}} = \frac{\omega}{k}$ .

Cependant, une onde plane n'a ni début ni fin, et il est difficile de parler dans cette situation de vitesse de propagation de l'onde en tant que telle. Il nous faut alors considérer une onde limitée spatialement. Une telle onde ne peut être monochromatique mais peut être décrite par une combinaison linéaire d'OPPM. On a alors:

$$\bar{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \text{ l'intégrale étant usuellement appelée } \textit{paquet d'onde}.$$

Considérons alors une onde quasi monochromatique, c'est-à-dire telle que la largeur en  $k$  du paquet d'onde ne soit pas trop importante. On peut alors écrire:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} = \omega_0 + (k - k_0)\omega'_0.$$

$$\text{On a alors } E(x, t) = A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \text{ avec } A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk g(k) e^{i(k - k_0)(x - \omega'_0 t)}$$

On voit alors que l'onde peut être décrite comme une onde plane mais dont l'amplitude dépendrait de  $x$  et de  $t$ , et plus précisément par l'intermédiaire du terme  $(x - \omega'_0 t)$  qui ne dépend dans ce cas pas de  $k$ . L'amplitude est donc de la forme  $A(x - \omega'_0 t)$ , ce qui signifie que la forme de l'onde, donc son *enveloppe* se déplace avec la vitesse  $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}$ , appelée *vitesse de groupe*.

De manière générale, la vitesse de groupe s'écrit:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On voit alors que si  $v_g$  ne dépend pas de  $k$ , alors on a  $v_g = v_\phi$ , et le milieu est alors dit non dispersif. Ceci est équivalent à dire que:

- la relation de dispersion est linéaire, c'est-à-dire que  $\varepsilon$  ne dépend pas de  $\omega$
- toute onde se propagera à la même vitesse  $v = v_g = v_\phi$ .

Par contre, si la vitesse de groupe dépend de  $\omega$  (ou de  $k$ ), alors le milieu est dit *dispersif*, et cette propriété se manifeste par le fait que la vitesse des ondes dépend de  $\omega$ . En ce qui concerne un paquet d'onde, ceci a pour conséquence que le paquet d'onde se déforme, et plus précisément qu'il s'élargit, les composantes de basse vitesse de groupe étant "à la traîne" par rapport aux composantes de haute vitesse de groupe.

Par exemple, dans une fibre optique, la relation de dispersion se met sous la forme:

$$k(\omega) = k_0 + k'_0 (\omega - \omega_0) + \frac{k''_0}{2} (\omega - \omega_0)^2.$$

La vitesse de groupe est alors donnée par  $v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{k'_0 + k''_0 (\omega - \omega_0)}$ , dépendante de  $\omega$ : le milieu est donc dispersif. L'étalement temporel de l'impulsion de largeur  $\Delta\omega$  après une

longueur  $L$  parcourue dans la fibre vaut alors:  $\Delta t = \frac{L}{v_g(\omega)_{\max}} - \frac{L}{v_g(\omega)_{\min}} = Lk''_0 \Delta\omega$ . On voit bien ici qu'il faut une dépendance de  $v_g$  en  $\omega$  pour qu'il y ait dispersion.

## B) Interprétation microscopique:

### 1) Première approche:

Si les variations de  $\vec{E}$  sont rapides, la polarisation induite suivra ces variations avec un certain retard, la polarisation nécessitant le déplacement de particules. Cependant, si on considère que le milieu est linéaire, alors en régime sinusoïdal permanent,  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  varient avec la même pulsation  $\omega$ . On peut donc prévoir et constater expérimentalement un déphasage retard dépendant a priori de la pulsation. On a alors:

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  et  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi) = \epsilon_0 (\chi' \cos \omega t + \chi'' \sin \omega t) \vec{E}_0$ . En notation complexe, ceci s'écrit alors  $\vec{P}_\omega = \epsilon_0 (\chi' + i\chi'') \vec{E}_\omega$ . On voit alors simultanément apparaître deux phénomènes:

- la dispersion puisque  $\chi$ , et donc  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi(\omega))$  dépend de la pulsation.
- L'absorption puisque  $\text{Im} \chi \neq 0$ .

On voit donc que les phénomènes de dispersion et d'absorption trouvent donc tous deux leur origine dans le retard de la polarisation induite par rapport au champ électrique exciteur. Nous pourrions nous arrêter là, mais un certain nombre de résultats plus quantitatifs peuvent être tirés d'un modèle phénoménologique : le modèle de l'électron élastiquement lié.

### 2) Modèle de l'électron élastiquement lié:

On prend le modèle simple d'un atome à un électron et on suppose que la distribution électronique rigide peut osciller "en bloc" de part et d'autre de sa position d'équilibre. En désignant par  $\vec{\delta}$  son déplacement, on a:

$$m \frac{d^2 \vec{\delta}}{dt^2} + f \frac{d\vec{\delta}}{dt} + k\vec{\delta} = -e\vec{E}$$

Et la moment dipolaire correspondant, qui vaut  $\vec{p} = -e\vec{\delta}$ , est régi par:

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{e^2}{m} \vec{E}(t)$$

En utilisant la notation complexe, on obtient une polarisabilité électronique complexe définie par  $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$  valant:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Cette polarisabilité présente donc une partie réelle et une partie imaginaire qui valent:

$$\alpha'(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad \alpha''(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

L'étude des courbes correspondantes montre que, pour une pulsation éloignée de la pulsation de résonance, l'absorption tend très rapidement vers 0, alors qu'elle est maximale pour  $\omega = \omega_0$ . Il y a donc existence d'une bande d'absorption.

### 3) Dispersion dans le domaine optique:

On s'intéresse ici à des matériaux transparents dans le domaine optique, c'est-à-dire non absorbant dans le visible. On a donc ici  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ , et la polarisabilité électronique vaut

alors  $\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . On utilise alors les relations liant la polarisabilité aux grandeurs

microscopiques: pour un milieu dilué, comportant  $N$  oscillateurs par unité de volume, on a les relations  $\chi = N\alpha$ ,  $\epsilon_r = 1 + \chi$  et  $n^2 = \epsilon_r$ . Cependant, de manière générale, le milieu possède plusieurs régions d'absorption et on a alors:

$$n^2 - 1 = \sum_i \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} = A + \sum_i \frac{D_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}, \text{ formule empirique de Sellmeier. Cette relation}$$

mène à deux relations suivantes:

- les bandes d'absorption sont situées dans l'UV, alors on a  $\lambda^2 \gg \lambda_i^2$  et un développement limité mène à la formule empirique de Cauchy  $n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$ . C'est cette formule qui explique le fait que, dans un prisme, le bleu soit plus dévié que le rouge.
- les bandes d'absorption sont situées dans l'IR et on a  $\lambda^2 \ll \lambda_i^2$  et un développement mène à l'introduction d'un terme supplémentaire qui donne la formule de Briot  $n^2 = A'\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$ .

### 4) Milieu amplificateur:

Nous allons ici illustrer très succinctement le principe d'un milieu optique amplificateur, comme un laser.

En plus du déplacement des charges dans le modèle microscopique envisagé, il nous faut prendre également en compte l'émission et l'absorption des photons par les atomes du milieu. Si on considère que les molécules sont essentiellement dans deux états d'énergie  $E_1$  et  $E_2$  à

raison de  $N_1$  et  $N_2$ , et que la pulsation  $\omega$  reste voisine de  $\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} > 0$ , on peut montrer

que:  $\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{q^2}{2m\epsilon_0\omega_0} (N_1 - N_2) f \frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma/2}$ , où  $f$  est une constante, et sa partie

imaginaire s'écrit  $\frac{q^2}{2m\epsilon_0\omega_0} (N_1 - N_2) f \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}$ , avec  $\Gamma = \gamma/2$ .

A l'équilibre thermique, la loi de Boltzmann nous indique que  $N_1 - N_2 > 0$ , et donc que  $k''$  est négatif: il y a bien absorption.

Cependant, dans un laser hélium-néon, on maintient les populations  $N_1$  et  $N_2$  constantes avec  $N_2 > N_1$ , ce qui implique que  $k''$  est cette fois négatif. Il va donc y avoir amplification de l'onde en  $e^{-k''x}$ .