

LP 41 Effet de peau Réflexion des ondes électromagnétiques planes à la surface d'un milieu conducteur

A) Etude des conducteurs :

1) Modèle de Drude Lorentz

Considérons un porteur de charge dans un milieu matériel où règne un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Le modèle de Drude Lorentz est celui où on modélise l'interaction d'un porteur de charge par un frottement visqueux  $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$  et une force de rappel  $-m\omega_0^2\vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est l'écart à la position d'équilibre du porteur de charge.

Si on écrit le principe fondamental de la dynamique, on a:

$$m \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} - m\omega_0^2\vec{u}$$

Plaçons nous à présent en régime sinusoïdal forcé, où le champ  $\vec{E}$  s'écrit  $\vec{E} = \text{Re}\{\underline{E}_0 e^{-i\omega t}\}$

En régime établi, on a donc:

$$\underline{\vec{u}}_0 = \frac{q}{m \left[ \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right]} \underline{\vec{E}}_0$$

On en déduit la polarisabilité volumique  $\underline{\vec{P}}_0 = n_v q \underline{\vec{u}}_0 = \frac{n_v q^2}{m \left[ \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right]} \underline{\vec{E}}_0$ , ce qui nous

permet de tirer l'expression de la susceptibilité électrique complexe définie par  $\underline{P}_0 = \epsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}_0$ :

$$\underline{\chi}(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\left[ \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right]}, \text{ avec } \chi(0) = \frac{n_v q^2}{m \omega_0^2 \epsilon_0}$$

On peut en tirer également la conductivité complexe du matériau considéré. En effet, si on exprime le courant volumique de charges:

$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , soit en notation complexe :  $j_0 = -i\omega P_0 = -i\omega \chi \epsilon_0 E_0 = \gamma E_0$  par analogie avec la loi d'Ohm.

On a alors  $\gamma = -i\omega \epsilon_0 \chi$ .

Pour un matériau quelconque, l'expression de la conductivité s'écrit:

$$\gamma = \frac{-i\omega n_v q^2}{m \left[ \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right]}$$

## 2) Cas des conducteurs : susceptibilité complexe

Dans le cas d'un conducteur, les charges sont libres et ne sont donc pas soumises à la force de rappel. On a donc  $\omega_0 = 0$  et l'expression de la conductivité complexe devient:

$$\gamma = \frac{-i\omega n_v q^2}{m \left[ -\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} \right]} = \frac{n_v q^2 \tau}{m [1 - i\omega\tau]} = \gamma(0) \frac{1}{1 - i\omega\tau}, \text{ avec } \gamma(0) = \frac{n_v q^2 \tau}{m}, \text{ conductivité en régime}$$

stationnaire.

Par conséquent, les parties réelles et imaginaires de la conductivité vont s'écrire:

$$\gamma' = \gamma(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \text{ et } \gamma'' = \gamma(0) \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

On peut alors caractériser le comportement isolant ou conducteur du matériau. En effet, la loi d'Ohm s'écrit:

$$\vec{j}_0 = \gamma' \vec{E}_0 + i\gamma'' \vec{E}_0 = \gamma' \vec{E}_0 - i\omega\epsilon_0 \chi' \vec{E}_0, \text{ où } \chi' = -\frac{\gamma''}{\omega\epsilon_0} \text{ est la partie réelle de la}$$

susceptibilité complexe du matériau.

En notation réelle, ceci revient à  $\vec{j} = \gamma' \vec{E} + \chi' \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t}$ , et l'équation de Maxwell – Ampère s'écrit:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \gamma' \vec{E} + (1 + \chi') \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_c + \vec{J}_D, \text{ somme des courants de } \textit{conduction} \text{ et de}$$

*déplacement*. C'est alors leur rapport qui caractérise le caractère conducteur ou isolant du matériau:

$$\frac{j_c}{j_d} = \frac{\gamma'}{\omega \epsilon'}.$$

- si  $j_c$  prédomine, c'est-à-dire si  $\frac{\gamma'}{\omega \epsilon'} \gg 1$  alors le matériau est conducteur
- si  $j_d$  prédomine, c'est-à-dire si  $\frac{\gamma'}{\omega \epsilon'} \ll 1$ , alors le matériau se comporte comme un isolant.

On voit par exemple que le cuivre est un bon conducteur pour des basses fréquences, mais qu'il devient un bon diélectrique dans le visible.

## 3) Effet de peau

Avant de poursuivre, examinons en détail une propriété des conducteurs dans l'ARQS.

Considérons un conducteur linéaire, homogène, isotrope, non magnétique et immobile dans le référentiel où l'on travaille, dont les caractéristiques sont:

- neutralité électrique volumique  $\rho = 0$
- loi d'Ohm  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$
- terme de déplacement négligeable  $\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{J} \right\|$

La première propriété se justifie. En effet, considérons l'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss pour un tel milieu:

$div \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . En y ajoutant la loi d'Ohm, on a  $div \vec{j} = \gamma div \vec{E}$  soit:

$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0}$  soit  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t}$ . Si il apparaît à un endroit du conducteur un excédent de

charge, celui-ci disparaît en un temps caractéristique  $\frac{\epsilon_0}{\gamma} = 1,5 \cdot 10^{-19} s$  pour le cuivre. Ceci étant

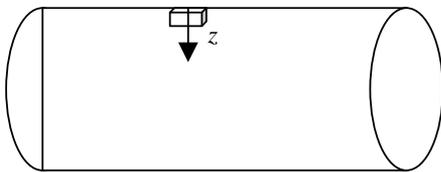
nettement inférieur au temps caractéristiques où l'on travaille  $\Delta t \gg 10^{-14} s$ , on peut considérer que le milieu est neutre globalement.

On a donc dans le conducteur:

$div \vec{E} = 0$  et  $rot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \gamma \vec{E}$ , ainsi que  $rot \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et l'équation de propagation de  $\vec{E}$  s'écrit:

$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , et donc pour  $\vec{j}$ :  $\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ .

Considérons alors un conducteur infini selon  $x$  de telle sorte que l'on ait  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$



Le système étant localement invariant par translation, toutes les grandeurs ne dépendent que de  $z$  et de  $t$ . L'équation à laquelle satisfait  $\vec{j}$  s'écrit alors:

$$\frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial j_x}{\partial t}$$

Plaçons nous alors dans le cas important d'un régime sinusoïdal, c'est à dire que  $j_x(z, t) = J_m(z) \cos(\omega t - \Phi(z))$ , ce qui s'écrit, en notation complexe,  $j_x = \underline{J}_m(z) e^{-i\omega t}$ , où  $\underline{J}_m(z) = J_m(z) e^{i\Phi(z)}$  est l'amplitude complexe du courant volumique.

On obtient donc alors:

$$\frac{d^2 \underline{J}_m}{dz^2} + i\omega \mu_0 \gamma \underline{J}_m = 0$$

Cherchons alors une solution sous la forme  $\underline{J}_m = A e^{rz}$ , ce qui nous donne:

$$\underline{r}^2 + i\omega \mu_0 \gamma = 0, \text{ soit } \underline{r} = \pm (-i\omega \mu_0 \gamma)^{\frac{1}{2}}. \text{ Comme } \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \text{ on a:}$$

$$\underline{r} = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{2}}$$

On a donc  $\underline{J}_m(z) = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\frac{z}{\delta}}$ , avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}$  épaisseur de peau.

Finalement, le courant volumique réel s'écrit:

$$\vec{j} = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

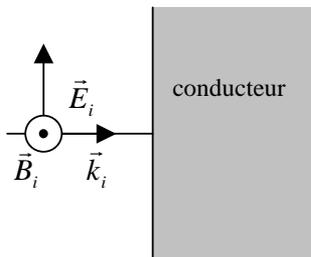
On voit donc que le courant  $\vec{j}$  devient nul vers l'intérieur du conducteur sur une épaisseur de quelques  $\delta$ . Cet effet s'appelle *effet de peau* ou *effet Kelvin*, du nom du physicien qui l'a pour la première fois mis en évidence.

Pour le cuivre  $\gamma = 58 \cdot 10^6 S.m^{-1}$ , on a  $\delta = 9,3 mm$  pour une fréquence de 50Hz, ce qui est supérieur au diamètre des fils. Le courant remplit donc tout le conducteur.

Par contre, pour une fréquence plus grande, par exemple 1MHz, l'épaisseur de peau ne vaut plus que  $66\mu m$ . Le courant est donc principalement localisé à la périphérie des fils. On voit donc alors que la section efficace du fil diminue et donc que la résistance et par conséquent la puissance dissipée par effet Joule augmente.

## B) Réflexion et réfraction d'un OPPM sur un conducteur:

On considère présent une OPPM tombant normalement sur un conducteur, toujours linéaire, homogène, isotrope, non magnétique.



Les champs associés aux diverses ondes s'écrivent alors:

- $\vec{E}_i = E_i e^{-i(\omega t - k_0 n_1 z)}$  pour l'onde incidente
- $\vec{E}_r = E_r e^{-i(\omega t + k_0 n_1 z)}$  pour l'onde réfléchie
- $\vec{E}_t = E_t e^{-i(\omega t - k_0 n_2 z)}$  pour l'onde transmise

### 1) Coefficients de Fresnel

Ecrivons alors les relation de passage à l'interface.

On a:  $E_i + E_r = E_t$  ainsi que, en l'absence de courant surfacique,  $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$ , avec  $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega}$ ,  $\vec{B}_r = \frac{-\vec{k}_i \wedge \vec{E}_r}{\omega}$  et  $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega}$

On a donc, en introduisant les coefficients  $\underline{r} = \frac{E_r}{E_i}$  et  $\underline{\tau} = \frac{E_t}{E_i}$ :

$1 + \underline{r} = \underline{\tau}$  et  $(1 - \underline{r})n_1 = \underline{\tau}n_2$ , ce qui nous donne l'expression des coefficients de Fresnel pour la réflexion et la transmission:

$$\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \underline{\tau} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Comme l'indice  $n_2$  est en général complexe, la réflexion et la transmission s'accompagnent d'un déphasage. Exprimons alors  $n_2 = n_2 + i\kappa_2$ , on trouve les facteurs de réflexion et de transmission en énergie:

$$R = |\underline{r}|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{n_2}{n_1} |\underline{\tau}|^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2}$$

Dans le cas d'une interface vide - conducteur, on a  $n_1 = 1$  et l'indice complexe du milieu est donné par  $\underline{n}_2^2 = \underline{n}^2 = \underline{\epsilon}_{r,2} = 1 + \underline{\chi}_e$ , avec  $\underline{\chi}_e = i \frac{\gamma(\omega)}{\omega \epsilon_0} = i \frac{\gamma(0)}{\omega \epsilon_0 (1 - i\omega\tau)}$

## 2) Divers cas en fréquence

a)  $\omega\tau \ll 1$ .

On a alors  $\underline{n} = \sqrt{i \frac{\gamma}{\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\epsilon_0}}(1+i)$ .

Le vecteur d'onde de l'onde transmise s'écrit alors:

$$\vec{k}_t = k_0 \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\epsilon_0}}(1+i)\vec{e}_z. \text{ Or } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}, \text{ donc } \vec{k}_t = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu_0}}(1+i)\vec{e}_z = \frac{1+i}{\delta}\vec{e}_z, \text{ où l'on}$$

retrouve l'épaisseur de peau de l'effet Kelvin que nous avons vu précédemment. Ceci est assez normal étant donné que la condition  $\omega\tau \ll 1$  nous place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Le champ transmis a donc pour expression:

$\vec{E}_t = E_t e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$ . On voit alors qu'au delà d'une distance de quelques  $\delta$ , le signal est quasiment nul.

Ce cas est valable tant que le terme de déplacement est négligeable devant le terme de conduction, soit tant que  $\frac{\gamma}{\omega\epsilon_0} \gg 1$ , car  $\gamma$  réel et  $\epsilon' = \epsilon_0$  car la susceptibilité est imaginaire

pure. On voit que cette condition implique que  $n = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\epsilon_0}} \gg 1$ . Le coefficient de réflexion en amplitude vaut alors:

$$\underline{r} = \frac{1-n-in}{1+n+in} \approx 1 \text{ et le coefficient en énergie vaut quasiment } 1. \text{ L'expression du coefficient}$$

de transmission en énergie vaut alors:

$$T = \frac{4n}{(1+n)^2 + n^2} \approx \frac{2}{n} = \frac{4\pi\delta}{\lambda_0}.$$

Par exemple pour le cuivre à 1GHz, on a  $n = 732 \gg 1$ ,  $T = 2,7 \cdot 10^{-3} \ll 1$ ,  $R = 0,9973 \approx 1$

b) Cas où  $\omega\tau \gg 1$

Dans ce cas, on a  $\gamma(\omega) = i \frac{\gamma(0)}{\omega\tau}$  et  $\underline{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ , où  $\omega_p = \sqrt{\frac{\gamma(0)}{\tau\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}}$  est la *pulsation*

*plasma*.

On peut alors envisager deux cas extrêmes autour de cette pulsation

i)  $\omega < \omega_p$

L'indice est alors imaginaire pur, puisque la permittivité est négative, et vaut:

$$n = i\kappa = i \sqrt{\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right)}. \text{ On voit donc que si la pulsation est bien inférieure à la pulsation}$$

plasma,  $\kappa \gg 1$  et donc  $\underline{r} = -1$ , soit  $R = 1$  et .

Dans le cas des métaux,  $\omega_p = 16.10^{15} \text{ rd.s}^{-1}$ , et les ondes lumineuses sont donc totalement réfléchies par l'interface, ce qui explique leur éclat métallique et leur utilisation dans les miroirs.

ii) Cas où  $\omega > \omega_p$

Dans ce cas l'indice est réel et vaut  $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ . On a alors  $r = \frac{1-n}{1+n}$  et  $\tau = \frac{2}{1+n}$ , soit

$R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$  et  $T = \frac{4n}{(1+n)^2}$ . On voit alors que pour  $\omega \gg \omega_p$ , la transmission est totale.

Ceci permet d'expliquer pourquoi les métaux sont transparents aux rayons X et aux UV forts.

Les deux paragraphes illustrent également la nécessité d'utiliser des hautes fréquences pour des communications Terre – satellites pour que la pulsation soit supérieure à la pulsation plasma de l'ionosphère ( $\omega_p = 18.10^6 \text{ rd.s}^{-1}$ ;  $\nu_p = 3\text{MHz}$ ).

3) Cas limite du conducteur parfait

Dans le cas où  $\omega \ll \omega_p$ , la réflexion par un milieu conducteur peut donc être considérée comme totale. Cette approximation revient à dire que le milieu est parfaitement conducteur, c'est-à-dire que  $\gamma \sim \infty$  et que le champ électromagnétique à l'intérieur est nul. On est alors conduit à introduire une charge surfacique et un courant surfacique donnés par les conditions de passage:

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{n}_{ext} \cdot \vec{E} \text{ et } \vec{j}_s = \vec{n}_{ext} \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right).$$

En incidence normale, on a alors  $\vec{E}_i = E_i e^{-i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$  et  $\vec{E}_r = E_r e^{-i(\omega t + k_0 n_1 z)} \vec{e}_x$ , soit et

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i - \vec{k}_r \wedge \vec{E}_r) = \frac{2E_i}{c} \cos(k_0 z) \cos(\omega t) \vec{e}_y.$$

Le courant surfacique vaut donc:

$$\vec{j}_s = -\vec{e}_z \wedge \frac{2E_i}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y = \frac{2E_i}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_x. \text{ Le courant surfacique est donc colinéaire à } \square.$$

C) Application:

1) Pression de radiation

Considérons une onde électromagnétique plane progressive tombant normalement sur un conducteur.

La mise en mouvement des porteurs de charge induit un courant volumique de charge, qui est en interaction avec le champ électromagnétique local selon la force de Laplace dont l'expression volumique vaut:

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{j} \wedge \vec{B}_t = \gamma \vec{E}_t \wedge \vec{B}_t = \gamma \cdot \mu_0 \vec{R}_t$$

Evaluons alors la force moyenne exercée à l'interface sur un tronçon de surface  $S$ :

$$\langle \vec{F} \rangle = \mu_0 S \int_0^\infty \langle \vec{R}_i(z) \rangle dz = \mu_0 S \langle \vec{R}_i(0) \rangle \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}} dz = \frac{\mu_0 S \delta}{2} \langle \vec{R}_i(0) \rangle$$

A l'aide du coefficient de transmission en énergie  $T = \frac{2}{n}$ , on a

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}} 2 \sqrt{\frac{2\omega \epsilon_0}{\gamma}} S \langle R_i(0) \rangle \vec{e}_z = \frac{2S}{c} \langle R_i \rangle \vec{e}_z. \text{ Une onde électromagnétique exerce}$$

donc sur un conducteur une *pression de radiation*  $p_{rad} = \frac{2\langle R_i \rangle}{c} = \epsilon_0 E_0^2$ .

## 2) Polariseur

Si on envoie une onde électromagnétique sur une grille de pas inférieur à la longueur d'onde, les résultats sur le conducteur parfait montrent que:

- la polarisation perpendiculaire aux barreaux va être transmise, puisque aucun courant macroscopique ne peut circuler dans cette direction
- la polarisation parallèle aux barreaux va être totalement réfléchi.

On a donc constitué un polariseur électromagnétique.