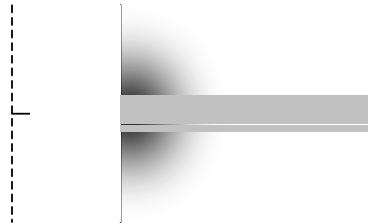


LP 44 Notion de rayon lumineux Principe de Fermat

A) Notion de rayon lumineux

1) Approche qualitative

Considérons une onde plane arrivant sur un diaphragme:



La limitation matérielle de l'onde incidente entraîne un phénomène d'éparpillement de la lumière, appelé diffraction.

Par ailleurs, on s'aperçoit que plus le diaphragme est petit, plus de phénomène de diffraction est important, c'est-à-dire que l'éparpillement de la lumière est plus grand.

Maintenant, si on néglige le phénomène de diffraction – nous verrons plus avant à quelles conditions cette approximation est valable – on peut considérer que l'énergie lumineuse est localisée dans le cylindre limité par le trou. On appelle alors rayon lumineux la droite que l'on peut imaginer (et qui est une pure vue de l'esprit) lorsqu'on réduit les dimensions du trou à l'infini tout est continuant à négliger le phénomène de diffraction. **Montrer avec un laser ainsi que la diffraction.**

Ceci constitue bien entendu une idéalisation étant donné qu'une diminution des dimensions du trou entraîne une augmentation de l'ampleur du phénomène de diffraction.

2) Approximation des faibles longueurs d'ondes:

Nous allons voir ici dans quelle mesure l'idéalisation effectuée précédemment est valide.

On peut montrer que si l'on impose une limitation $\Delta x = D$ à l'étendue spatiale de l'onde, la limitation Δk_x de la composante sur x du vecteur d'onde $\vec{k}$ est reliée à Δx par:

$$\Delta x \cdot \Delta k_x \approx 0,5$$

Autrement dit, plus Δx est petit, plus Δk_x est grand, ce qui implique un éparpillement plus important.

Ceci implique que, comme $\Delta x = D$ et $\Delta k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$,

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{10D}$$

Donc pour pouvoir négliger le phénomène de diffraction, il faut que θ soit petit et donc que $\lambda \ll 10D$.

Par exemple, pour une ouverture de $10 \mu\text{m}$, il faut $\lambda < 1 \mu\text{m}$, ce qui, pour ces dimensions de diaphragme, contient les longueurs d'ondes du visible.

L'optique géométrique apparaît donc comme l'approximation des très faibles longueurs d'onde.

B) Propagation des rayons lumineux:

1) Principe de Fermat

Le premier énoncé du principe de Fermat a été fait en 1657 sous la forme : " la nature procède toujours par les voies les plus courtes", ce qui appliqué aux rayons lumineux, mène à affirmer que pour aller de A à B, un rayon lumineux empruntera le chemin qui assure la plus petite valeur au temps de parcours:

$$\tau_{AB} = \int_A^B \frac{n}{c} ds, \text{ où } n \text{ est l'indice du milieu}$$

ce qui revient à dire qu'il faut que:

$$L_{AB} = \int_A^B n ds \text{ soit extrémal}$$

La grandeur L_{AB} est appelée chemin optique de A à B.

2) Conséquences immédiates:

→ dans un milieu homogène, on $L_{AB} = n \overline{AB}$ qui est extrémal ssi le trajet se fait en ligne droite.

$$\rightarrow \text{on a } L_{AB} = \int_A^B n ds = \int_B^A n (-ds) = \int_B^A n ds' \text{ avec } ds' = -ds.$$

Ceci constitue le principe du trajet inverse de la lumière: si L_{AB} est extrémal, alors L_{BA} l'est aussi, ce qui signifie que la nature géométrique de la trajectoire ne dépend pas du sens de parcours.

→ Equation des rayons lumineux:

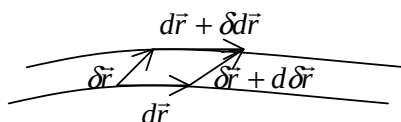
Ecrivons mathématiquement le principe de Fermat:



La différence de chemin optique entre ces deux trajets vaut :

$$\delta L = (AB)_{C'} - (AB)_C$$

$$= \delta \left(\int_A^B n \vec{u} \cdot d\vec{r} \right)$$



On a donc :

$$\begin{aligned}\delta L &= \int_A^B \delta(n\vec{u} \cdot d\vec{r}) \\ &= \int_A^B \delta n \cdot \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_A^B n \cdot \delta\vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_A^B n \cdot \vec{u} \cdot \delta d\vec{r}\end{aligned}$$

or comme $u^2 = 1$, on a $\vec{u} \cdot \delta\vec{u} = 0$ donc $\delta\vec{u} \perp d\vec{r}$ et donc la deuxième intégrale est nulle.

Or $\delta n = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \delta\vec{r}$ et $\vec{u} \cdot d\vec{r} = ds$ donc $\delta n \cdot \vec{u} \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \delta\vec{r} \cdot ds$ et, par intégration par parties $\int_A^B n \vec{u} \cdot \delta d\vec{r} = [n \vec{u} \cdot \delta\vec{r}]_A^B - \int_A^B d(n\vec{u}) \cdot \delta\vec{r}$. Le premier terme étant nul, $\int_A^B n \vec{u} \cdot \delta d\vec{r} = - \int_A^B d(n\vec{u}) \cdot \delta\vec{r}$

En écrivant alors que $\delta L = 0$, on trouve que:

$$\int_A^B [\overrightarrow{\text{grad}} n \cdot ds - d(n\vec{u})] \cdot \delta\vec{r} = 0. \text{ Cette expression étant valable quelque soit les chemins choisis,}$$

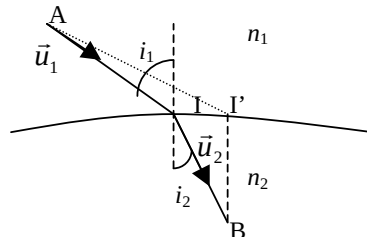
on obtient l'équation des rayons lumineux:

$$\overrightarrow{\text{grad}} n = \frac{d(n\vec{u})}{ds}$$

Cette relation est très souvent utilisée pour l'étude de la propagation dans des milieux à gradients d'indice, milieux rencontrés dans les phénomènes de mirages ou les fibres optiques par exemple.

3) Lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction

On considère l'interface de séparation entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 :



Le chemin optique de A à B s'écrit ici:

$$L(AB) = n_1 AI + n_2 IB = n_1 \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{AI} + n_2 \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{IB}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}\delta L &= L(AI'B) - L(AIB) \\ &= n_1 (AI' - AI) + n_2 (I'B - IB) \\ &= n_1 \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{\delta I} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{\delta I}\end{aligned}$$

Ceci devant être valable quelque soit le déplacement infinitésimal $\overrightarrow{\delta I}$, on a:

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N}$$

On voit donc que pour la réflexion et pour la réfraction, les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale au plan : ceci constitue la première loi de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

Par ailleurs on a:

$$n_1 \vec{u}_1 \wedge \vec{N} = n_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{N} \text{ soit la deuxième loi de la réfraction : } n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Pour la réflexion, il suffit d'écrire $n_1 = -n_2$ d'où on tire que $i'_1 = -i_1$

On peut donc résumer les lois de Descartes de la façon suivante:

- les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence défini par la normale au point d'incidence et le rayon incident
- l'angle de réflexion et l'angle d'incidence sont reliés par $i'_1 = -i_1$
- l'angle de réfraction et l'angle d'incidence sont reliés par $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Les lois sur la réfraction montre qu'il existe toujours un rayon réfracté quand $n_2 > n_1$, mais

par contre, quand $n_1 > n_2$, il existe une valeur de i_1 pour lequel $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 = 1$, et donc pour tout

angle d'incidence supérieur à cet angle limite, on a $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$ et il est donc impossible de définir l'angle réfracté. IL n'y a donc pas d'angle réfracté au dessus d'un certain angle limite défini par $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. **Montrer l'angle limite.**

C) Conséquences et applications:

1) Phénomène de mirage:

Le phénomène de mirage est observé par les journées de forte chaleur. On attribue ce phénomène à l'existence d'un gradient d'indice causé par l'échauffement de l'air qui induit des variations de densité de l'air. On peut modéliser cette variation d'indice par $n(z) = n_0 + \alpha.z$, où $\alpha > 0$, puisque l'air est plus chaud vers le sol, donc moins dense et donc l'indice est plus faible (l'indice est d'autant plus proche de 1 que le milieu est proche du vide).

Utilisons alors l'équation des rayons lumineux. On a $\frac{d(n\vec{u})}{ds} = n_0 \alpha \vec{u}_z$. En multipliant vectoriellement cette relation par $\vec{u}_z$, on trouve que $\frac{d\vec{u}_z \wedge n\vec{u}}{ds} = 0$, ce qui implique que le rayon lumineux reste toujours dans le même plan xOz .

Introduisons alors l'angle que fait la tangente au rayon lumineux en z et la verticale locale, défini par $|\sin i(z)| = \|\vec{u}_z \wedge \vec{u}\|$.

On a alors $n(z) \sin i(z) = \text{cste} = n(z_s) \sin i_s$.

En introduisant alors l'angle complémentaire de i , on a, si on suppose cet angle petit, on a $n(z_s) = n(z) \left(\frac{1 - \theta^2 / 2}{\sin i_s} \right)$. On a alors $\frac{n(z_s) \sin i_s}{n(z)} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \sin i_s$. Par ailleurs on suppose que l'effet est petit, soit $\alpha.z \ll n_0$, et donc on peut écrire

$$\frac{n(z_s)\sin i_s}{n(z)} = \frac{n_0 + \alpha \cdot z_s}{n_0 + \alpha \cdot z} \sin i_s = \left(1 + \frac{\alpha}{n_0} z_s\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n_0} z\right) \sin i_s = \sin i_s \left(1 + \frac{\alpha}{n_0} z_s - \frac{\alpha}{n_0} z\right). \quad \text{On en}$$

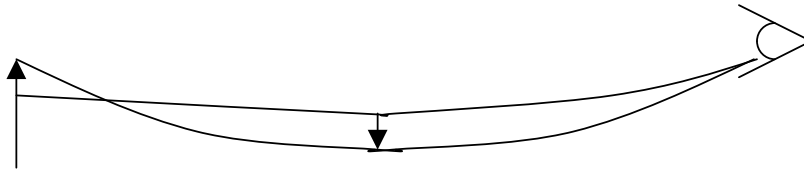
tire que $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2\alpha}{n_0}(z - z_s)$. En dérivant par rapport à x , on tire que:

$$2 \frac{dz}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2\alpha}{n_0} \frac{dz}{dx}, \text{ et donc } \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\alpha}{n_0}.$$

L'équation de la trajectoire du rayon lumineux s'écrit alors:

$$z(x) = z_s + \frac{x}{\tan i_s} + \frac{\alpha}{2n_0} x^2.$$

On assiste donc à un phénomène qui se traduit ainsi:



On voit donc les objets comme s'ils étaient à l'envers. C'est en particulier ceci qui explique pourquoi, lors de fortes chaleurs, on a l'impression qu'il y a des mares d'eau sur le sol: il s'agit en fait du reflet du ciel.

2) Fibres optiques: