LP 47 Obtention d'interférences à deux ondes en optique
Notion de cohérence

Introduction:
Expérimentale:
Trous d'Young: une fente masquée, puis l'autre, puis les deux ouvertes : on observe non pas la somme de deux éclairements mais des franges. On dit alors qu'il y a eu interférence entre les deux ondes issus des trous 1 et 2.
Refaire la manip avec les trous d'Young éclairés directement avec la QI et montrer qu'il n'y a pas d'interférences.
Nous allons ici interpréter ces phénomènes à l'aide des résultats de la théorie ondulatoire de la lumière de Maxwell. Nous expliquerons comment on peut avoir le résultat paradoxal "lumière+lumière=ombre", c'est à dire des interférences, puis nous déterminerons dans quelles conditions précises on peut obtenir des interférences.

A) Interférence lumineuse à deux ondes:

1) Position du problème:

Considérons deux sources monochromatiques, ponctuelles S_1 et S_2. *Nous nous limiterons ici à des vibrations monochromatiques de même pulsation et dans le même état de polarisation caractérisé par le vecteur* $\vec{u}$. Les champs électriques associés aux deux ondes issues de ces sources s'écriront alors, en un point *M*:
$\vec{E}_j(M) = a_j(M)e^{i(\varphi_j(M)-\omega.t)}\vec{u} \quad j \in \{1,2\}$.
Le champ électrique résultant aura donc pour expression:
$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$, et donc:
$\vec{E}(M) = \left(a_1e^{i\varphi_1} + a_2e^{i\varphi_2}\right)e^{-i\omega.t}$
L'intensité se calcule alors aisément par $I = \vec{E}\vec{E}^*$ soit:
$I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, ou encore, en introduisant les intensités associées aux ondes 1 et 2 $I_j = a_j^2$,

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

2) Interprétation physique:

Le résultat précédent montre que, à priori, si on éclaire un écran avec deux sources monochromatiques de même pulsation, on obtient des intensités différentes sur l'écran. En effet, si l'on suppose $I_1 = I_2 = I_0$, on a alors :
$I = 2I_0(1+\cos(\varphi_2 - \varphi_1))$, et donc que l'intensité varie de 0 à $4I_0$. C'est en fait l'interprétation que l'on donne de la première expérience.
Les intensités des deux sources ne s'additionnent pas : on dit qu'il y a *interférence entre les deux ondes*.
Cependant, on pourrait s'attendre également à ce que si l'on éclaire un écran avec deux lampes filtrées pour qu'elles soient monochromatiques, on obtienne également des variations d'intensité. La seconde expérience montre qu'il n'en est rien. En effet, lorsque chez soi on allume plusieurs lampes dans un pièce, on s'attend à ce que les intensités s'ajoutent

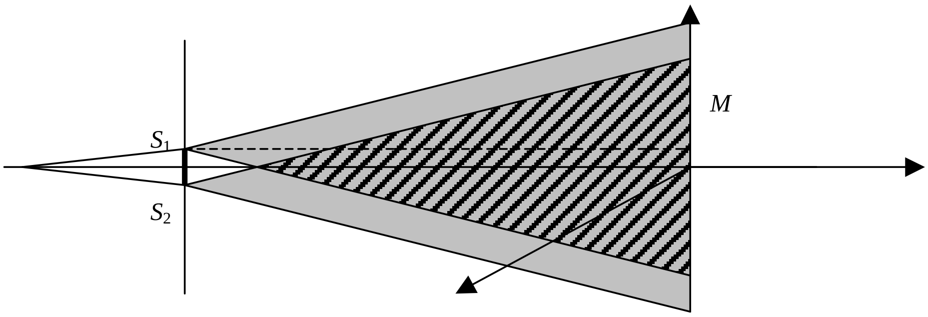
directement, et c'est de fait ce qui se passe. Ceci tient en fait à la nature de l'émission par les sources, sur laquelle nous reviendrons lorsque nous aborderons la notion de cohérence.

Retenons pour l'instant qu'il existe des conditions pour obtenir des interférences et nous supposerons que nous sommes dans ces conditions, c'est à dire dans les conditions satisfaites par la première expérience. Lorsque nous sommes dans ces conditions, on dit que les deux sources sont *cohérentes* entre elles.

3) Retour sur la première expérience :

Le dispositif que nous avons utilisé s'appelle *dispositif des trous d'Young*. Il est constitué de deux trous éclairés par une même source ponctuelle.

C'est sur cet exemple que nous allons aborder et définir toutes les notions qui vont nous



permettre de décrire et d'expliquer un phénomène d'interférence.

Dans ces conditions, le déphasage entre les deux ondes arrivant en M vaut:

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left[(SS_2M) - (SS_1M)\right]$, avec $SS_jM = \int_{(SM)_j} ndl$ chemin optique parcouru par l'onde j.

On appelle *différence de marche entre les rayons* 1 *et* 2 la quantité $\delta = (SS_2M) - (SS_1M)$.

L'intensité lumineuse en M va donc s'écrire:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)$$

On voit alors que les régions correspondant à $\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta = 2k\pi$, soit $\delta = k.\lambda$, correspondent à des *interférences constructives*, c'est à dire que les amplitudes des ondes s'ajoutent pour donner les régions de l'espace les plus brillantes, et que les régions où $\delta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ correspondent à des *interférences destructrices*, c'est à dire que les amplitudes des deux ondes se retranchent pour donner une intensité minimale.

On définit alors *l'ordre d'interférence* $p = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{\delta}{\lambda}$. Si celui-ci est entier, on a donc un maximum d'intensité et si c'est un demi entier on a alors un minimum d'intensité (nul si les intensités 1 et 2 sont les mêmes).

Calculons alors la différence de marche entre les deux rayons issus dans le dispositif des trous d'Young:

Appelons les coordonnées de M et a la distance entre les deux trous.

On a $S_1M = \sqrt{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$; $S_2M\sqrt{\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$

D'où $\delta = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$

Dans les conditions usuelles d'observations, le point M est situé au voisinage de O et donc $(x, y) << D$.

On peut donc développer cette expression pour obtenir:

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

L'expression de la répartition de l'intensité sur l'écran est donc:

$$\boxed{I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)}$$

L'intensité sur l'écran ne dépend que de *x* pour une différence de marche au premier ordre, et donc on observe des franges rectilignes parallèles aux fentes dans la direction *y*.

Pour décrire plus quantitativement ces fentes, on définit l'*interfrange*, distance entre deux franges sombre (ou brillantes).

Cette interfrange est ici une constante de l'ordre d'interférence. Elle correspond à: $\frac{ai}{\lambda.D} = 1$ donc $i = \frac{\lambda.D}{a}$. Pour la mesurer, on mesure la distance entre deux franges sombre, l'œil étant plus sensible aux extinctions qu'au maxima d'intensité.

Par exemple, pour une distance $D = 2m$, un écartement des franges $a = 1mm$ et une longueur d'onde typique du visible $0,5\mu m$, on a $i = 1mm$, distance tout à fait mesurable.

Ce dispositif à une importance énorme:

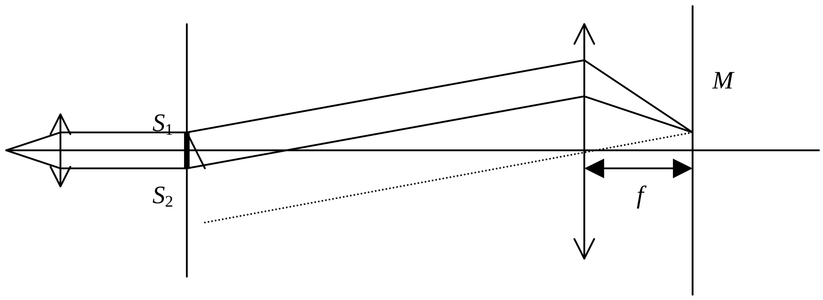
- d'une part parce qu'il a permis pour la première fois de mesurer les longueurs d'ondes des ondes lumineuses
- d'autre part parce que de nombreux systèmes interférentiels sont optiquement analogues au trous d'Young, c'est-à-dire à deux sources ponctuelles cohérentes.

B) Obtention pratique d'interférences à deux ondes:

Il existe un grand nombre de dispositifs permettant d'obtenir des interférences à deux ondes, et ceux-ci sont en général optiquement équivalents à des trous d'Young.

1) Interférences à l'infini dans le cas des trous d'Young:

Pour certaines expériences, on utilise parfois le montage suivant:



La présence des lentilles sembre compliquer le calcul de la différence de marche. En fait, il n'en est rien.

En effet, le faisceau issu de la première lentille est un faisceau parallèle, et donc les surfaces équiphases sont verticales, ce qui signifie en particulier que les deux sources sont en phase.

De même, pour la seconde lentille, tout plan perpendiculaire à la direction du faisceau parallèle est un plan équiphase.

La différence de marche se calcule alors directement en appelant H le projeté orthogonal de S_1 sur le rayon issu de S_2 et θ l'angle que forme S_1H avec la verticale:

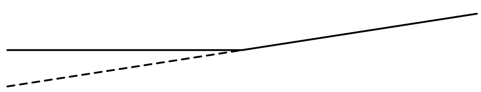
$\delta = a \sin\theta$.

Par ailleurs on a $\tan\theta = \frac{x}{f}$ et donc, si θ est petit:

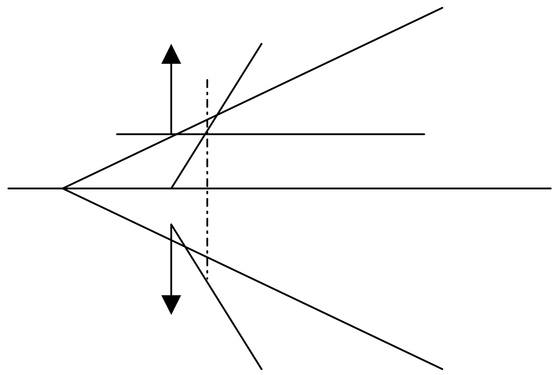
$$\boxed{\delta = a\frac{x}{f}}$$

2) Miroirs de Fresnel:

Il s'agit de deux miroirs plans formant un dièdre d'angle α. Une source ponctuelle S éclaire les miroirs sous incidence rasante.



3) Bilentilles de Billet



C) Cohérence entre deux ondes :

Nous avons dit dans la première partie qu'il n'y avait interférence que dans certaines conditions très particulières. Ces conditions constituent ce que l'on appelle la cohérence entre deux ondes. Nous allons ici détailler ce point.

1) Position du problème:

Pour définir la visibilité d'un phénomène d'interférence, on définit le *contraste ou facteur de visibilité* $C = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

Dans le cas de l'étude que nous avons fait des trous d'Young en supposant que les ondes étaient parfaitement cohérentes, nous avions $I_{\min} = 0$ et donc $C = 1$. De manière générale, le contraste est strictement inférieur à 1, c'est-à-dire que les minima d'intensité ne correspondent pas à une intensité nulle. Ceci peut être dû à deux phénomènes:

- d'une part la source S n'est pas rigoureusement ponctuelle, c'est-à-dire qu'elle est constituée d'une multitude de sources dont les système d'interférence vont se superposer sur l'écran. On parle alors de perte de *cohérence spatiale*.
- d’autre part la source S n'est en général par rigoureusement monochromatique, et chaque longueur d'onde va créer son propre système d'interférence qui va se superposer aux autres. On parle alors de perte de *cohérence temporelle*.

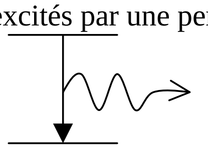
2) Influence de la largeur de la source S ; cohérence spatiale.

Nous avons dit plus haut que lorsque la source était étendue, les systèmes d'interférence se superposaient, c'est-à-dire que nous avons supposés que les diverses sources qui la composent sont incohérentes entre elles. Explicitons cela un peu plus.

Considérons pour cela deux sources indépendantes, ponctuelles et monochromatiques.

A la limite, chacune de ces sources est constituée d'un atome qui émet de la lumière, et l'incohérence entre ces deux sources est directement liée au mode d'émission des atomes.

Les atomes émettent de la lumière par suite de la désexcitation des atomes préalablement excités par une perturbation extérieure.



Comme l'émission atomique est lancée, interrompue puis relancée à la suite des collisions entre atomes, le champ électrique qui représente l'émission lumineuse se présentera sous la forme de trains d'onde, de durée limitée τ, qui se succèdent de façon aléatoire.

Ceci signifie en particulier que deux trains d'ondes issus de deux sources différentes présenteront entre eux une phase aléatoire $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Si on reprend alors l'expression des deux champ électriques associés en un point M en tenant compte cette fois de cette phase, on a:

$$\vec{E}(M) = \left(a_1 e^{i(\varphi_1+\Phi_1)} + a_2 e^{i(\varphi_2+\Phi_2)}\right)e^{-i\omega.t}$$

L'intensité associée sera alors:

$$I = \vec{E}.\vec{E}^* = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[(\varphi_2 - \varphi_1) + (\Phi_2 - \Phi_1)]$$

Or l'ordre de grandeur de τ est d'environ $10^{-8}s$, c'est à dire l'ordre de grandeur du temps séparant deux collisions. Comme les détecteurs ont un temps d'intégration beaucoup plus grand que cette durée (pour l'œil il vaut environ un vingtième de seconde), la détection donnera comme résultat la valeur moyenne de l'intensité sur un très grand nombre de train d'ondes soit:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\langle\cos[(\varphi_2 - \varphi_1) + (\Phi_2 - \Phi_1)]\rangle$$

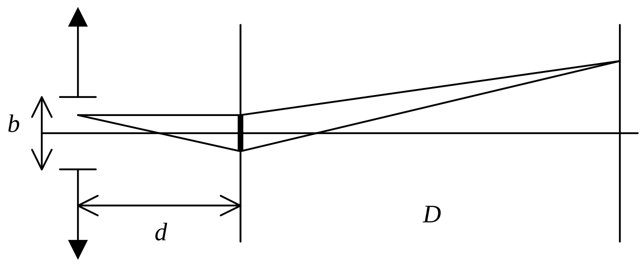
Or la phase $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ est aléatoire, et donc la valeur moyenne du cosinus sera alors nulle et la grandeur détectée sera donc:

$$I = I_1 + I_2.$$

Lorsque deux sources sont différentes, on voit que c'est leurs intensité qui s'ajoutent et non leur amplitude, du point de vue de la détection.

Cependant, on peut alors se demander pourquoi il y a interférence lorsque l'on utilise le dispositif des trous d'Young. En fait, dans ce dispositif, sur l'écran, c'est le même train d'onde qui interfère avec lui même, puisque les deux sources sont issues d'une même source ponctuelle. On a alors toujours $\Phi = 0$, même si par ailleurs Φ_1 et Φ_2 varient aléatoirement au cours du temps.

Afin d'évaluer un peu plus quantitativement la perte de cohérence spatiale, regardons quel est l'effet d'une source étendue sur le dispositif des trous d'Young.



Isolons un élément de la source de largeur dX d'intensité correspondante $dI = \frac{I_0}{b}dX$. Par analogie avec le résultat obtenu pour les trous d'Young, la différence de marche introduite par la fait que cette source est hors de l'axe médian des deux trous vaut $\delta' = \frac{aX}{d}$, et la différence de marche totale en M vaut donc $\delta = \frac{aX}{d} + \frac{ax}{D}$.

Intégrons alors sur toutes la source:

$$I = \frac{I_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{X}{d} + \frac{x}{D}\right)\right)dX$$

Soit donc directement:

$$I = \frac{I_0}{b}\left[b + \frac{\lambda.d}{2\pi a}\left(\sin\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\frac{b}{2d}\right) - \sin\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D}-\frac{b}{2d}\right)\right)\right]$$
$$= I_0\left\{1 + \frac{\lambda.d}{\pi ab}\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right\}$$

Soit, en introduisant $u = \frac{\pi ab}{\lambda d}$, on obtient:

$$\boxed{I = I_0\left\{1 + \sin c(u)\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right\}}$$

On voit alors que l'intensité obtenu dans le cas d'une source ponctuelle est modulée par le sinus cardinal. On retrouve d'ailleurs bien l'expression d'une source ponctuelle pour $u << 1$.

Ici on a $I_{\max} = I_0(1+\sin c(u))$ et $I_{\min} = I_0(1+\sin c(u))$. Le contraste vaut alors:

$$\boxed{C = \frac{\sin u}{u}}$$

L'étendue spatiale de la source entraîne donc une baisse du contraste, et donc une baisse de visibilité du phénomène.

Pour qu'il n'y ait pas de brouillage des franges, il faut donc que $u << \pi$, soit $a << \frac{\lambda d}{b}$.

La quantité $\frac{\lambda d}{b} = \frac{\lambda}{\alpha}$ est appelée largeur de cohérence de la fente, et où α est l'angle sous lequel on voit la source depuis le dispositif interférentiel.

Cette condition de cohérence spatiale est assez drastique car, pour $a = 1mm$, $l = 30cm$ et $u = 1{,}9$, valeur correspondant à $C = 0{,}5$, on trouve $b \approx 1/10\,mm$.

Remarque : on n'a ici considéré qu'un extension spatiale selon *X*. En effet, une extension spatiale de la source selon *Y* n'introduit aucune différence de marche supplémentaire au niveau des trous, et donc entraîne la superposition des diverses figures d'interférences en coïncidence. On utilise donc cette extension pour obtenir plus de lumière sans perte de contraste.

3) Influence de la largeur spectrale de la source : cohérence temporelle.

La seconde cause de perte de contraste lors d'un phénomène d'interférence est qu'une source n'est jamais parfaitement monochromatique : elle est en général caractérisée par une largeur spectrale $\Delta\nu$ centrée autour d'une fréquence ν_0.

Plusieurs causes sont à l'origine de cette non monochromaticité:

- l'agitation moléculaire, et plus précisément la durée qui sépare deux collisions, qui confère à la répartition spectrale un profil lorentzien $\frac{1}{1+b(\nu-\nu_0)^2}$
- l'effet Doppler : la lumière est émise par des atomes qui sont en agitation thermique et cette agitation provoque un déplacement de la fréquence autour de ν_0 pour un observateur dans le référentiel "fixe" du laboratoire. Ceci confère à la répartition spectrale un profil gaussien $e^{-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}}$

Pour simplifier l'analyse on suppose que le profil est rectangulaire de largeur $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$, l'intensité étant alors directement proportionnelle à $d\nu$.

L'intensité vaut donc:

$$I = \frac{I_0}{\Delta\nu}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\left(1+\cos\frac{2\pi ax}{cD}\nu\right)d\nu$$
$$= I_0\left(1+\frac{\sin v}{v}\cos\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) \quad \text{avec } v = \frac{\pi ax\Delta\nu}{cD}$$

On obtient donc un bon contraste si $v < \pi$, soit donc si $\frac{ax}{D} < \frac{c}{\Delta\nu}$ et donc si:

$\delta < c\tau_c$, où $\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$ est appelé *temps de cohérence de la source*. Exprimé différemment, on doit avoir $\delta < l_c$, où $l_c = C.\tau_c$ est appelée *longueur de cohérence de la source*.

L'interprétation physique est ici assez délicate, mais un modèle utile consiste à dire que τ_c est de l'ordre de grandeur de τ. L'émission lumineuse est donc constituée de trains d'onde de longueur l_c. Tant que la différence de marche reste inférieure à cette longueur, les trains d'ondes qui interfèrent sur l'écran correspondent à la même émission atomique, tandis qu'au dessus, ce sont des trains d'onde différents, qui présentent alors entre eux une phase aléatoire, comme vu plus haut : il n'y a donc plus d'interférences.

On peut préciser quelques valeurs:

- raie D du sodium (bec Bunsen) $\Delta\nu = 10GHz$ $l_c = 3cm$
- lampe spectrale à mercure $\Delta\nu = 1GHz$ $l_c = 30cm$
- laser monomode $\Delta\nu = 1MHz$, $l_c = 300m$.

Conclusion:

Application très nombreuses:

- interférence : mesure d'indice.
- cohérence temporelle : mesure de la largeur spectrale d'une raie