

LP 49 Diffraction de Fraunhofer. Applications

Intro: expérience QI et fente. Tout d'abord fente large puis resserrement : diffraction

La diffraction est le phénomène d'éparpillement de la lumière que l'on observe dans le cas d'une onde spatialement limitée. Nous allons ici en étudier les causes physiques et les propriétés, qui découlent d'un principe appelé principe d'Huygens Fresnel.

A) Diffraction de Fraunhofer:

1) Principe d'Huygens – Fresnel:

Ce principe est à la base de l'interprétation du phénomène de diffraction et s'appuie sur une théorie exclusivement ondulatoire.

Son énoncé comporte deux parties:

- (1) La contribution d'Huygens (1678) : *La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément.*
- (2) La contribution de Fresnel (1818) : *L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. On dit alors que toutes ces sources interfèrent pour former la vibration au point considéré.*

Mathématiquement, ceci signifie que l'amplitude d'une onde au point P , $\psi(P)$, se met sous

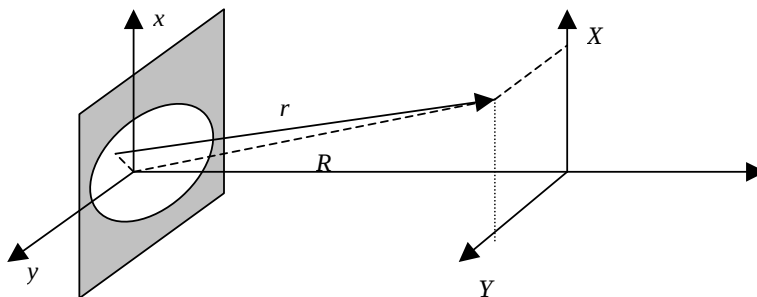
la forme: $\psi(P) = \sum_i \psi_i(M_i) Q_i \frac{e^{ikr_i}}{r_i} \Delta S_i$, ou en notation continue:

$$\psi(P) = \int_S \psi(M) Q \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

Le coefficient Q est homogène à l'inverse d'une longueur et dépend de l'angle que fait $\overrightarrow{MP}$ avec la normale à la surface en M .

2) Approximation de Fraunhofer:

Considérons une onde monochromatique tombant sur un diaphragme D plan quelconque.



D'après le schéma, il vient :

$$r = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2xX - 2yY}$$

$$\text{Soit } r = R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{2xX + 2yY}{R^2}}$$

L'approximation de Fraunhofer consiste à dire deux choses:

- Q est une constante
- Le développement binomial de r ne contiennent que des termes du premier ordre en x et y

La deuxième condition s'écrit alors:

$$r = R \left(1 - \frac{xX + yY}{R^2} \right) = R - \frac{xX + yY}{R}. \text{ En introduisant alors le vecteur unitaire } \vec{e} = \frac{\overrightarrow{OP}}{R}, \text{ on}$$

a alors $r = R - \vec{e} \cdot \overrightarrow{OM}$

L'amplitude au point P s'écrit donc, dans le cadre de cette approximation:

$$\boxed{\psi(P) = Q \frac{e^{ikR}}{R} \int_D \psi(M) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}}}, \text{ où } \vec{k} = k\vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}$$

Au dénominateur on n'a gardé que le terme à l'ordre zéro car les variations de l'amplitude sont beaucoup plus faible que celles de la phase pour une même variation de x . En effet, pour une variation de l'ordre de λ , l'amplitude varie en $\frac{\lambda}{R^2} \ll 1$ alors que la phase, elle, varie de 2π .

3) Conditions d'observation:

Les résultats établis ci-dessus sont valables uniquement dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, c'est-à-dire lorsque R est grand devant la taille du diaphragme.

Précisons les ordres de grandeur. Pour cela, développons r jusqu'à l'ordre suivant:

$$r = R \left(1 - \frac{xX + yY}{R^2} + \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right) = R - \frac{xX + yY}{R} + \frac{x^2 + y^2}{2R}.$$

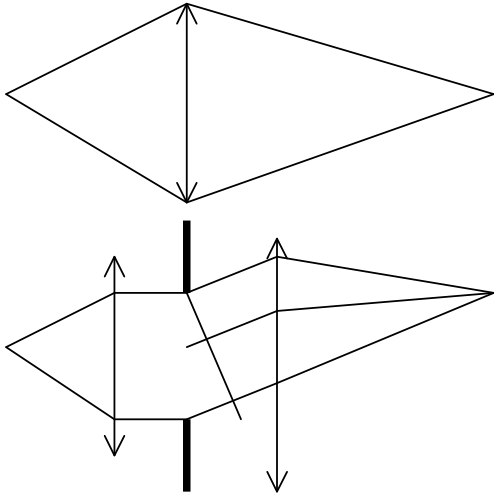
Il faut pour être en diffraction de Fraunhofer que, par exemple, le troisième terme soit inférieur à 10^{-2} dans la phase, soit $\frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{R} < 0,01$. Calculons alors à quelle distance doit

être le point d'observation P . On a $R > \frac{100\pi}{\lambda} (x^2 + y^2)$, ce qui donne, pour $\lambda = 0,6\mu\text{m}$:

- pour une ouverture de diamètre $100\mu\text{m}$, $R > 1,3\text{m}$
- pour une ouverture de diamètre 1 mm , $R > 130\text{m}$
- pour une ouverture de diamètre 10 cm , $R > 1,300\text{km}$

On voit donc que pour des diamètres usuels, l'approximation de Fraunhofer est extrêmement drastique. Cependant, c'est elle qui joue un rôle prépondérant dans la description de la tache de diffraction autour de l'image géométrique d'un objet par un système optique, comme par exemple une lentille, qui diaphragme l'onde.

En effet, considérons un montage simple où on fait l'image d'un objet par une lentille L de diamètre fini:



Pour comprendre pourquoi c'est exactement et rigoureusement la diffraction de Fraunhofer qui intervient, remarquons que ce montage est équivalent à deux lentilles et un diaphragme placées comme suit:

La différence de phase entre deux rayons arrivant en P est alors exactement celle qu'ils présenteraient après la diffraction par le diaphragme et avoir interféré à l'infini.

Ainsi, au point P , l'amplitude s'écrit:

$$\psi(P) = A \int_D \psi(M) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} \vec{e} \cdot \vec{OM}}$$

La tache de diffraction autour de l'image géométrique d'un point par un système optique (que l'on peut toujours décomposer comme on l'a fait avec la lentille) est donc **rigoureusement** décrite par la diffraction de Fraunhofer. C'est donc là que cette approximation prend toute son importance.

Pratiquement, il existe donc deux méthodes pour observer l'amplitude diffractée par un diaphragme:

- soit de manière approchée avec un écran suffisamment éloigné
- soit de manière rigoureuse au niveau de l'image par une lentille de la source lumineuse, avec le diaphragme placé contre la lentille.

De manière générale, cependant, ce n'est pas l'amplitude que l'on observe mais l'intensité. Celle-ci est donnée par $I(P) = |\psi(P)|^2$, soit

$$I(P) = \frac{Q^2}{R^2} \left| \int_D \psi(M) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha.x + \beta.y)} \right|^2. \text{ Par ailleurs, on s'intéressera souvent plus à une}$$

répartition d'intensité relative, et donc on omettra par la suite le facteur de proportionnalité, tant dans l'expression de l'amplitude que dans celle de l'intensité.

4) Lien avec la transformée de Fourier:

Si on introduit les coordonnées du vecteur $\vec{e}(\alpha, \beta)$, on aura alors:

$$\psi(P) = \int_D \psi(M) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha.x + \beta.y)}. \text{ On introduit alors les nouvelles variables } u = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ et } v = \frac{\beta}{\lambda},$$

appelées fréquences spatiales en raison de leur dimension physique qui est l'inverse d'une longueur.

L'amplitude s'écrit alors:

$$\psi(P) = \int_D \psi(M) e^{-2i\pi(u.x + v.y)}. \text{ Par ailleurs, dans le cas des petits angles, c'est-à-dire pour une}$$

observation autour de l'axe optique, conditions fréquentes d'utilisation, on aura $R \approx z$ et donc

$$u = \frac{X}{\lambda.z}; v = \frac{Y}{\lambda.z}. \text{ Les variations de l'amplitude en fonction de } u \text{ et } v \text{ sera donc similaire, à une}$$

homothétie près, aux variations de l'amplitude en fonction des coordonnées spatiales du point

P. Nous pourrions donc donner la répartition d'intensité sur un écran indifféremment en fonction des deux systèmes de coordonnées, et donc identifier l'allure de la répartition l'intensité en variables (u,v) à celle en variable spatiale (X,Y) .

Considérons à présent un faisceau tombant parallèlement sur un diaphragme. C'est ce qui se passe en particulier dans le cas d'observation rigoureuse de Fraunhofer, en vertu de la décomposition du système en deux lentilles.

Généralement, le diaphragme est caractérisé par une *fonction transmittance*, défini par:

$\psi(M) = t(x,y)\psi_0(M)$, où $\psi_0(M)$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente en M . La fonction transmittance peut être complexe, la phase éventuelle traduisant le fait que le diaphragme provoque un déphasage de l'onde qui le traverse. Par ailleurs on peut étendre sa définition à tout l'espace en la prenant nulle en tout point n'appartenant pas au diaphragme.

Dans le cas d'une onde plane, $\psi_0(M)$ ne dépend pas de M et on a donc:

$$\psi(P) = \psi_0 \iint t(x,y) e^{-2i\pi(u.x+v.y)} dx dy \text{ et pour l'intensité:}$$

$$I = I_0 \left| \iint t(x,y) e^{-2i\pi(u.x+v.y)} dx dy \right|^2$$

On voit donc que l'amplitude transmise par un diaphragme est la transformée de Fourier de la transmittance du diaphragme. Cette propriété sera mise à profit à plusieurs reprises pour déterminer les propriétés de la diffraction de Fraunhofer.

B) Propriétés et applications:

1) Diffraction par une fente:

Considérons une fente rectangulaire éclairée par un faisceau de lumière parallèle, de longueur a et de largeur b .

L'amplitude diffractée s'écrit, en coordonnées (u,v) :

$$\psi(u,v) = \psi(0) \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-2i\pi(u.x+v.y)} dx dy = \psi(0) \left[\int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\pi u.x} dx \right] \left[\int_{-b/2}^{b/2} e^{-2i\pi v.y} dy \right]$$

Donc par intégration:

$$\psi(u,v) = \psi(0) ab \frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} \frac{\sin(\pi v b)}{\pi v b}$$

Et l'intensité de l'onde se déduit aisément:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi v b)}{\pi v b} \right)^2$$

On reconnaît alors la fonction sinus cardinal. Dans le cas d'une fente très fine, c'est-à-dire $a \ll b$, le pic central est beaucoup plus fin dans la direction correspondant à la coordonnée v et l'intensité dans les pics secondaires est beaucoup plus fine. On a donc un étalement de lumière perpendiculairement à la fente.

Montrer sur expérience. + BFR p214

2) Théorème de Babinet:

Si on considère deux écrans, l'un complémentaire de l'autre, c'est-à-dire que la réunion des deux forme un écran totalement opaque. Supposons que l'on connaisse la figure de diffraction de l'un des deux écrans, de transmittance $t(x,y)$. La répartition en amplitude va donc s'écrire:

$$\psi(M) = \iint t(x,y) e^{-i(u.x+v.y)} dx dy$$

L'écran complémentaire va être caractérisé par une transmittance $1 - t(x, y)$. On peut donc directement écrire la répartition en amplitude du faisceau diffracté comme:

$$\psi_c(M) = \iint (1 - t(x, y)) e^{-i(u.x + v.y)} = \delta(u, v) - \psi(M)$$

Ainsi, en intensité, on aura:

$$I_c(M) = \delta^2(u, v) - \delta(u, v)(\psi(M) + \bar{\psi}(M)) + |\psi|^2 = \delta(u, v) + I(M)$$

On retrouve le théorème de Babinet:

La répartition en intensité des figures de diffraction de deux écrans complémentaires est la même sauf au voisinage de l'image géométrique de la source ($u = v = 0$)

Ceci suggère une première application de la diffraction : on peut mesurer la dimension d'un petit objet en en faisant la figure de diffraction, qui est la même que celle du diaphragme correspondant. On peut par exemple mesurer le diamètre d'un cheveu, dont la figure de diffraction sera celle d'une fente. En mesurant l'interfrange on aura accès à la taille du cheveu.

3) Ecrans répartis aléatoirement:

Considérons un diaphragme constitué d'écrans identiques répartis aléatoirement dans le plan (x, y) . Si on désigne par $t(x, y)$ la transmittance d'un des écrans, la transmittance du diaphragme va s'écrire:

$$T(x, y) = \sum_i \delta(x_i, y_i) * t(x, y), \text{ où } (x_i, y_i) \text{ désigne les coordonnées du centre de chacun des } N \text{ écrans.}$$

On aura donc l'amplitude diffractée:

$$\Psi(M) = \iint \sum_i \delta(x_i, y_i) * t(x, y) = \psi(M) \cdot \sum_i e^{-i(x_i u + y_i v)}, \text{ et l'intensité s'écrira:}$$

$$\mathfrak{I} = I(M) \left(\sum_i e^{-i(u.x_i + v.y_i)} \right) \left(\sum_i e^{+i(u.x_i + v.y_i)} \right) = I(M) \left(N + \sum_{i, j \neq i} 2 \cos[(x_i - x_j)u + (y_i - y_j)v] \right)$$

Si N est assez grand et que les écrans sont aléatoirement répartis, on a:

$$\mathfrak{I}(M) = I(M) \cdot N$$

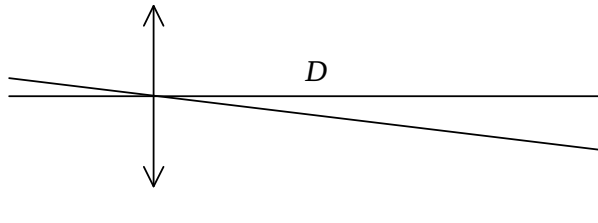
On obtient donc la même répartition en intensité, mais N fois plus intense.

Ceci est mis à profit par exemple pour mesurer le diamètre de grains de petite taille, que l'on considère comme identique et que l'on répartit sur une lame transparente de manière aléatoire. En mesurant l'interfrange on obtient la taille des grains.

4) Limite du pouvoir de résolution d'appareils optiques.

Beaucoup d'appareils optiques sont constituées de lentilles qui diaphragment la lumière puisqu'elles sont spatialement limitées. Cette limitation entraîne une diffraction d'un faisceau incident. On peut montrer que la figure de diffraction d'une ouverture circulaire est constituée d'une tache centrale circulaire de rayon $\frac{1,22\lambda}{D}$, où R est le rayon de l'ouverture.

Considérons à présent un télescope observant une étoile, et supposons qu'à côté de cette étoile s'en situe une autre, que nous supposons pour simplifier identique du point de vue du rayonnement, et que les directions des deux étoiles font un angle α entre elles.



Le pouvoir de résolution est donné par le *critère de Rayleigh*: deux objets ne sont plus séparables dès que le maximum du pic central de diffraction entourant l'image d'un des objets coïncide avec le

premier minimum de la figure de diffraction entourant l'image du second objet.

Exprimé mathématiquement, ceci signifie que la largeur à mi-hauteur de chacun des pics soit inférieure à la distance qui sépare les images géométriques des deux points sources.

Dans l'exemple précédent, ceci signifie que:

$$\Delta X_{1/2} \approx \frac{0,61\lambda}{R} < D\alpha. \text{ Ainsi, on ne pourra distinguer les deux étoiles que si:}$$

$$\alpha > \frac{0,61\lambda}{D}$$

Cependant, ce calcul suppose qu'il n'y a pas d'autres causes qui viennent perturber la résolution, ce qui n'est généralement pas le cas. Pour les télescopes, il faut prendre en compte les turbulences atmosphériques, qui impose une limitation beaucoup plus drastique que la diffraction.

Ceci étant, on peut avoir une vision positive de ce phénomène en disant que lorsque le critère de Rayleigh est vérifié pour un instrument d'optique, on peut alors considérer que toutes les autres causes de non résolution ont été corrigées.