LP 50 Réseaux plans en optique

Introduction:

Après avoir étudié les phénomènes d'interférence et de diffraction, nous allons maintenant nous servir de ces résultats pour étudier un système optique d'une grande importance : les réseaux.

Les réseaux sont des systèmes optiques qui ont une importance énorme dans l'analyse spectrale d'une radiation, puisqu'ils sont dispersifs. Nous allons tout d'abord étudier la figure d'interférence associée à un réseau, puis nous verrons dans quelle mesure ils permettent d'étudier quantitativement la répartition spectrale d'une radiation.

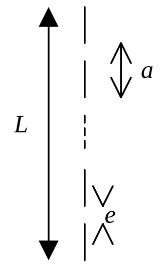
A) Etude des réseaux

1) Définition, réalisation et généralités:

Un réseau est une structure périodique qui diffracte une lumière incidente. Celui-ci est caractérisé par:

- sa période ou pas a, que l'on caractérise souvent en nombre de figure par mm.
- La largeur de chacun des motifs élémentaires e.
- Sa longueur totale L ou, ce qui est équivalent, le nombre total de traits éclairés, les deux grandeurs étant reliées par $L = aN$.

Le réseau le plus simple est constitué par un ensemble de fentes parallèles:



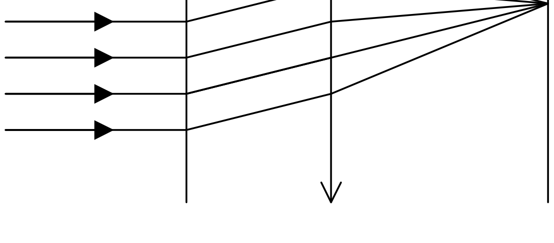
Historiquement, les premiers réseaux de ce type ont été fabriqués par Fraunhofer en 1819 par enroulement d'un fil de cuivre sur deux tiges parallèles. Cependant, c'est en 1882 que Rowland fabriqua un très bon réseau de 5511 traits/cm sur une longueur de 15 cm environ.

Aujourd'hui, on utilise de façon courante des copies de réseaux "originaux", obtenus sur gélatine par contact et qui donnent de très bon résultats. On utilise également des réseaux holographiques, obtenus en imprimant l'intensité diffractée par deux fentes, ce qui donne une transmittance sinusoïdale au réseau.

Les causes d'incertitudes sont principalement liées au défaut de périodicité du réseau, qui entraîne l'apparition de figures de diffraction parasites, appelées *ghost*.

On utilise également des réseaux par réflexion, constitués de bandes réfléchissantes, qui présente l'avantage d'éviter les défauts qu'occasionne la traversée du matériau, en particulier les défauts d'homogénéité et de planéité.

Si on éclaire un réseau à l'aide d'un faisceau parallèle, on aura donc diffraction par chacune des fentes du réseau puis interférences entre les divers rayon issus de toutes les fentes:

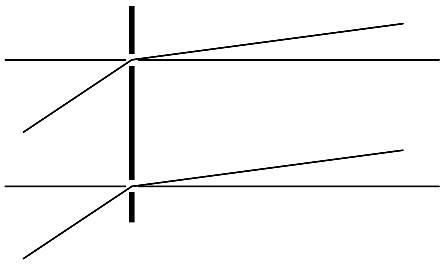


Il s'agit donc d'interférences à ondes multiples, et il va falloir étudier les différences de marche entre chacun des rayons pour obtenir la figure d'interférence et de diffraction sur l'écran.

C'est ce que nous allons faire à présent.

2) Formule fondamentale des réseaux:

Considérons un réseau de pas *a*, dont nous supposerons pour l'instant les fentes infiniment fines, éclairés sous une incidence *i*.



Comme on l'a vu dans le cadre des trous d'Young, la différence de marche entre les deux rayons issus de chaque trous vaut:

$\delta = a\sin\theta - a\sin i$

Si on a, d'après ce que l'on a vu sur les interférences, $\delta = k.\lambda$, alors on aura un maximum d'intensité, puisque si deux rayons présentent entre eux cette phase, tous les rayons seront déphasés entre eux de 2π, à un multiple de 2π près.

Ceci constitue la formule fondamentale des réseaux: on observe des maxima d'intensité dans la direction donnée par:

$$\boxed{\sin\theta = k\left(\frac{\lambda}{a}\right) + \sin i}$$

Remarque : pour les réseaux par réflexion, l'angle *i* est obtus, et en général on considère plutôt l'angle d'incidence $i' = \pi - i$. La relation fondamentale des réseaux s'écrit alors, pour un réseau par réflexion:

$$\sin\theta + \sin i' = k\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

3) Calcul de l'intensité diffractée par un réseau:

L'amplitude diffractée par le réseau s'écrit, d'après ce que l'on a vu dans le chapitre sur la diffraction:

$$\psi(M) = A\int t(x)e^{-2i\pi\left(\frac{\sin\theta - \sin i}{\lambda}\right)x}dx = A\int\sum_{m=0}^{N-1} t_e(x - m.a)e^{-2i\pi ux}dx \text{, où } t_e(x) = \begin{cases} 1\, si - e < x < e \\ 0\, autrement \end{cases}$$

Si on introduit la variable $X = x - ma$, on a:

$$\psi(M) = A\sum_{m=0}^{N-1}\int t_e(x)e^{-2i\pi u(X+ma)}dX$$

$$= \left(A\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi.u.ma}\right)\left(\int t_e(x)e^{-2i\pi uX}\,dX\right)$$

On voit donc apparaître le produit de deux termes:

- le premier est appelé facteur de structure ou fonction réseau. Il correspond au terme d'interférence lorsque les fentes peuvent être considérées comme infiniment fine.
- Le second est appelé facteur de forme. Il correspond à la figure de diffraction d'une fente de largeur *e*.

Etudions tout d'abord la fonction réseau:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi.u.ma} = \frac{1-e^{-2i\pi.u.aN}}{1-e^{-2i\pi.u.a}} = \frac{1-e^{-iN\Phi}}{1-e^{-i\Phi}}, \text{ avec } \Phi = 2\pi.u.a.$$

Le facteur de structure s'écrit alors:

$$e^{-i(N-1)\frac{\Phi}{2}} \frac{2i\sin\frac{N\Phi}{2}}{2i\sin\frac{\Phi}{2}} = e^{-i(N-1)\frac{\Phi}{2}} \frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}$$

L'intensité correspondante sera donc:

$$\boxed{I_r = A^2\left(\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}\right)^2}, \text{ avec } \Phi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin\theta - \sin i)$$

On voit alors qu'on a $I_r(\Phi) = 0$ pour $\frac{N\Phi}{2} = p\pi$ et p entier non nul non multiple de N.

Lorsque p est un multiple de N ou nul, que se passe-t-il?

Autour de ce point, on a $\sin\frac{N\Phi}{2} \sim \frac{N\Phi}{2}$ et $\sin\frac{\Phi}{2} \sim \frac{\Phi}{2}$, donc l'intensité du facteur de structure s'écrit:

$I_r(\Phi = k\pi) \sim A^2 N^2$. On a donc en ces points des maxima d'intensité.

Le facteur de forme a donc l'allure suivante: BFR p.241

Les maxima secondaires sont en général très peu marqués, et ceci se vérifie en calculant par exemple $I_r(\Phi = 3\pi / N) \approx \frac{A^2 4N^2}{9\pi^2} = 4.10^{-2} A^2 N^2$.

On retiendra donc que *les maxima secondaires sont très peu visibles, seuls seront observés les maxima principaux*.

Ces maxima correspondent à, comme on l'a vu plus haut: $\Phi = k\pi$ soit avec l'expression de Φ :

$\sin\theta - \sin i = k\frac{\lambda}{a}$. On retrouve bien la relation fondamentale du réseau par transmission, ce qui est normal.

Etudions à présent le facteur de forme. Celui-ci correspond, comme nous l'avons dit, à la figure de diffraction d'une fente fine de largeur e et vaut donc:

$I_f = \frac{\sin^2 u}{u}$, avec $u = \frac{\pi.e(\sin\theta - \sin i)}{\lambda}$, fonction sinus cardinal que nous avons déjà rencontré lors de l'étude de la diffraction. L'intensité totale aura donc l'allure suivante : BFR p.243

Il s'ensuit un affaiblissement de l'intensité des pics d'ordre k non nuls.

Remarque : le calcul que nous venons de faire pour le facteur de forme n'est valable que si $e >> \lambda$ pour négliger toute interaction entre les bords du diaphragme et la fente. Ceci n'est en général pas tout à fait exact, puisque typiquement e est de l'ordre du micromètre. Cependant, le résultat reste qualitativement le même et on observe bien cet affaiblissement d'intensité.

On s'aperçoit alors que la position des maxima principaux sur l'écran dépend de la longueur d'onde de la radiation incidente. Le réseau est donc un instrument d'optique dispersif, et la mesure de cette position (et donc de l'angle d'émergence correspondant au maximum pour une radiation) donne accès à la longueur d'onde, et ceci de manière plus précise qu'un prisme. On utilise donc les réseaux en spectroscopie, comme nous allons le voir à présent.

B) Application à la spectrométrie:

1) Dispersion angulaire:

Considérons un faisceau tombant sous une incidence *i* sur le réseau, et constitué de deux radiations de longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + d\lambda$.

La *dispersion angulaire*, c'est-à-dire la l'angle séparant deux maxima à un ordre *k* correspondant à chacune des longueurs d'onde est donnée en différentiant la relation fondamentale des réseaux:

$a.\cos\theta.d\theta = k.d\lambda$. La dispersion angulaire du réseau vaut donc:

$$D_a = \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)_{\theta=\theta_m} = \frac{k}{a.\cos\theta_m} = \frac{\sin\theta_m - \sin i}{\lambda.\cos\theta_m}.$$

La dispersion est donc plus forte lorsque l'ordre est élevé et que le pas est faible. C'est pour cette raison qu'usuellement on observe les spectres donnés par un réseau à l'ordre 2, où la dispersion angulaire est grande. Notons que contrairement au prisme, ce sont les plus grandes longueurs d'onde qui sont le plus déviées, c'est-à-dire que c'est le rouge est plus dévié que le bleu.

On peut également définir la dispersion linéique dans le plan focal d'une lentille d'observation de focale *f* par:

$$D_l = fD_a.$$

On a donc directement accès à l'écart entre deux longueurs d'ondes en mesurant dans le plan focal d'une lentille $\Delta x = \frac{k}{a}\Delta\lambda$, si on choisit *i* de telle sorte que l'ordre *k* corresponde à $\theta = 0$.

2) Minimum de déviation:

Comme un prisme, un réseau présente un minimum de déviation. En effet, si on introduit la déviation:

$D = \theta - i$, on a $\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1$.

Or, à *m, a* et λ donnés, on a $\cos\theta.d\theta - \cos i.di = 0$ soit $\frac{dD}{di} = \frac{\cos i}{\cos\theta} - 1$

On voit donc que pour $\theta = -i$, le cas $\theta = i$ correspondant à l'ordre 0 non diffracté, on a un extremum de déviation qui est un minimum, ce qui se montre en calculant le signe de la dérivée seconde en $\theta = -i$.

Or à ce minimum, la relation fondamentale des réseaux donne:

$$2a\sin i = 2a\sin\frac{D_m}{2} = k.\lambda.$$

Connaissant l'ordre et la déviation minimale que l'on peut mesurer, on en tire λ. Ceci étant, cette méthode peu précise n'est plus très utilisée aujourd'hui.

3) Pouvoir de résolution:

Nous avons dit au paragraphe 1) qu'il suffisait de mesurer l'écart en distance entre deux pics principaux correspondant à deux longueurs d'onde pour déterminer un écart en longueur d'onde.

Cependant nous n'avons pas tenu compte de la largeur de ce pic, et donc nous n'avons pas envisagé la possibilité que ces deux pics se recouvrent et donc que l'on ne puisse plus les distinguer l'un de l'autre.

Nous allons maintenant nous intéresser à ceci, qui traduit le pouvoir de résolution du réseau.

On utilise pour cela le critère de Rayleigh, qui dit que pour que deux radiations soit séparables, il faut que la distance entre les deux maxima soit supérieur à la largeur à mi hauteur de chacun des pics ou, ce qui revient au même, que la limite de résolution se situe au moment où le maximum d'intensité d'une raie pour un ordre *k* donné coïncide avec le premier minimum de l'autre raie.

Considérons alors deux radiations de longueurs d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

Pour la première raie, le maximum est donné par:

$$\Phi = \frac{2\pi.a}{\lambda}(\sin\theta - \sin i) = 2k\pi$$

Le premier minimum correspond à une variation pour la phase de $\delta\Phi = \frac{2\pi}{N}$, ce qui implique que, comme $\delta\Phi = \frac{2\pi a}{\lambda}\cos\theta.d\theta$, $\cos\theta.d\theta = \frac{\lambda}{a.N}$.

Par ailleurs, la position relative du maximum correspondant à la longueur d'onde $\lambda + \Delta\lambda$ s'obtient par $\cos\theta.d\theta = k\frac{\Delta\lambda}{a}$, en différenciant la formule fondamentale des réseaux.

On a donc $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$, ceci étant *le pouvoir de résolution du réseau*.

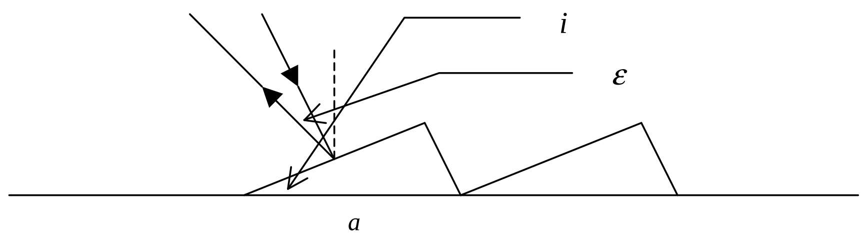
Apparemment, le pouvoir de résolution ne dépend pas du pas du réseau. Cependant, on travaille en général à *l* fixé, et donc le pouvoir de résolution s'écrit $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\frac{l}{a}$. On voit donc que plus le pas du réseau est petit, plus le pouvoir de résolution est grand. Ceci n'est pas surprenant étant donné que ce résultat rejoint l'influence de *a* sur la dispersion angulaire.

Par exemple pour le doublet jaune du sodium, $\Delta\lambda = 0{,}6nm$ et $\lambda_m = 589{,}3nm$ donc si on veut résoudre ce doublet, il faut que, pour l'ordre 2, $N > 491 \approx 500$ traits

4) Réseau blazé:

On a vu dans l'étude du facteur de forme que l'on perdait de l'intensité lumineuse lorsque l'on s'éloignait de l'ordre 0, qui est donc le plus lumineux. Or, l'ordre 0 n'est pas dispersif, c'est-à-dire qu'il est totalement inintéressant d'un point de vue d'analyse spectrale.

Pour remédier à ce problème, on utilise des *réseaux blazés*, ou *réseaux échelettes*.



Nous allons en illustrer le principe en se plaçant en incidence normale) la direction des miroirs.

La figure de diffraction va être donnée par:

$$I_f = I_0 \sin c^2\left(\frac{\pi a \cos i}{\lambda}\sin\varepsilon\right)$$

Par ailleurs, la différence de marche entre deux rayons issus de deux miroirs différents va s'écrire:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sin i - \sin(i+\varepsilon)\right)$$

L'intensité totale va donc s'écrire:

$$I = I_0 \sin c\left(\frac{\pi a \cos i}{\lambda}\sin\varepsilon\right)\left(\frac{\sin\frac{N\Phi}{2}}{\sin\frac{\Phi}{2}}\right)^2$$

On voit donc que l'on peut choisir l'ordre où va se situer le maximum d'intensité, qui se situe géométriquement en $\varepsilon = 0$.

En effet en ce point, on aura un maximum dispersif d'ordre K si $\frac{\Phi}{2} = K\pi$, soit $2a\sin i = K\lambda$ et donc $i = \arcsin\left(\frac{K\lambda}{2a}\right)$.

On peut donc choisir l'angle de telle manière que l'ordre le plus lumineux soit l'ordre le plus dispersif.

Par ailleurs, les autres maxima principaux du facteur de structure sont donnés par:

$$\frac{\Phi}{2} = (K+m)\pi$$

ce qui correspond à $\sin i + \sin(\varepsilon + i) = (K+m)\frac{\lambda}{a}$. En considérant alors que les angles sont petits, on a $\sin i + \cos i\varepsilon + \sin i = (K+m)\frac{\lambda}{a}$ et donc $\varepsilon = \frac{m}{\cos i}\frac{\lambda}{a}$.

Or dans ces directions, le facteur de forme vaut:

$$\sin c^2\left(\frac{\pi a \cos i}{\lambda}\frac{m}{\cos i}\frac{\lambda}{a}\right) = \sin c^2(m\pi) = 0 \text{ car } m \neq 0.$$

On n'a donc qu'un seul maximum principal, celui correspondant à $\varepsilon = 0$, et donc une accumulation de lumière dans cette direction.

On voit cependant que l'inconvénient de ces réseaux blazés est qu'ils ne sont blazés que pour une longueur d'onde donnée, puisque le choix de i fait intervenir λ. Ils sont cependant très utiles pour de la spectrométrie où on doit avoir une bonne lumière pour l'analyse.

Nous nous sommes ici placés en incidence normale, mais on peut également concevoir des réseaux blazés pour une autre incidence, ce qui facilite leur mise en œuvre. Il existe également des réseaux blazés par transmission.