LP 53 Exemples de filtres linéaires d ordre un et deux en électricité.
Fonction de transfert et réponse temporelle.
Application au filtrage d'un signal périodique

Introduction:

Nous allons dans cette leçon procéder à l'étude de quelques circuits fondamentaux en électricité, appelés filtres. Ces circuits sont à la base de tout le traitement du signal en télécommunication par exemple, et permettent de transformer l'amplitude ou la phase d'un signal de manière très sélective en fonction de la fréquence.

Nous allons tout d'abord définir ce qu'est un filtre, puis nous allons faire l'étude électrique de ces filtres en utilisant les notions de fonction de transfert et de transformée de Fourier d'un signal.

A) Généralités sur les filtres:

1) Filtres:

De manière générale, un filtre est un quadripôle dont le module et la phase de la fonction de transfert dépend de la fréquence en régime harmonique.

Dans toutes la suite, nous considérerons un signal périodique décomposé en série de Fourier, c'est-à-dire que ce signal présentera des composantes sinusoïdales de fréquences multiples de sa fréquence fondamentale.

Il existe cinq types de filtres fondamentaux:

- Les filtres passe – bas, de bande passante définie par $[0, f_H]$
- Les filtres passe – haut, de bande passante définie par $[f_B, \infty]$
- Les filtres passe – bande, de bande passante définie par $[f_B, f_H]$
- Les filtres coupe – bande de bande coupée définie par $[f_B, f_H]$
- Les filtres passe – tout, caractérisé uniquement par le déphasage qu'ils introduisent.

Nous nous limiterons ici aux trois premiers types de filtres.

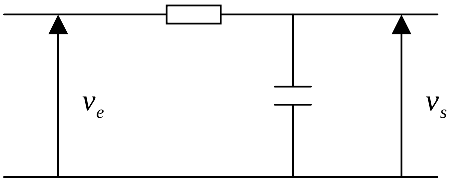
Pour étudier ces différents filtres, nous regarderons leur réponse pour une attaque avec une signal sinusoïdal $v_e = V_e \cos(\omega.t + \varphi_e)$ ou en notation complexe $\underline{v}_e = V_e e^{j\varphi_e}$.

Par ailleurs, une de leur principale caractéristique sera leur *bande passante à –3dB*, c'est-à-dire la zone caractérisée par:

$|H| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire en décibels définis par $G = 20\log|H|$, $G \geq 20\left(\log\frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)$ et donc $G \geq G_{\max} - 3dB$.

2) Filtre passe bas:

La réalisation pratique d'un filtre passe bas est la suivante:



La fonction de transfert de ce filtre vaut, en notation complexe:

$$H(\omega) = \frac{\underline{v}_s(\omega)}{\underline{v}_e(\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En sortie, on aura donc un signal donné par $v_s = \dfrac{V_e}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}\cos(\omega.t + \varphi_e + \varphi(\omega))$, avec $\varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega)$.

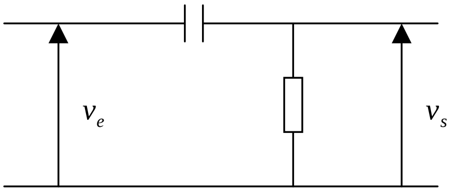
On peut également écrire le gain en décibel de ce filtre $G(\omega) = 20\log(H(\omega))$ soit $G(\omega) = -10\log\left(1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$, où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{RC}}$.

Il s'agit bien d'un filtre passe – bas d'ordre 1, car sa bande passante à –3dB vaut $[0{,}2\pi.\omega_0]$.

On voit alors que pour des fréquences inférieures à $f_0 = 2\pi.\omega_0$, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée, et que pour des fréquences supérieures à f_0, la tension de sortie est nulle.

3) Filtre passe – haut:

La réalisation pratique d'un filtre passe haut est la suivante:



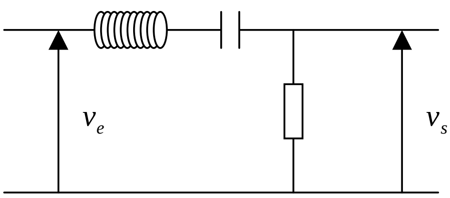
La fonction de transfert de ce filtre vaut:
$H(\omega) = \dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \dfrac{1}{1-j\dfrac{\omega_0}{\omega}}$

C'est bien un filtre passe – haut d'ordre 1 de bande passante à –3dB $[f_0, \infty]$. Le signal de sortie sera donc, en notation réelle:

$$v_s = \frac{V_e}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}}\cos(\omega.t + \varphi_e + \varphi(\omega)), \text{ avec } \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Le gain en décibel de ce filtre vaut $G(\omega) = -10\log\left(1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

4) Filtre passe-bande :



La fonction de transfert de ce filtre vaut:
$H(\omega) = \dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega-\omega^2LC} = \dfrac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$,

avec $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

On voit alors que pour ω petit et ω grand, la fonction de transfert tend vers 0 : c'est donc bien un filtre passe – bande dont le pic se situe à $\omega = \omega_0$ et dont la bande passante à –3dB est délimitée par:

$$\omega_B = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right) \quad \omega_H = \omega_0\left(\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right) \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

On voit donc que plus Q est élevé, et plus la bande passante du filtre est étroite, c'est-à-dire plus le filtre est sélectif. C'est pourquoi le facteur Q est appelé *facteur de qualité du filtre passe – bande*.

B) Action d'un filtre sur un signal périodique:

1) Rappel sur les signaux périodiques:

Tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de pulsation multiple de la pulsation fondamentale correspondant à la période du signal:

$s_{\omega_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n.\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$, ou, en notation complexe $\underline{s} = \sum_0^{\infty} \underline{c}_n e^{-in\omega_0 t}$

Par exemple, un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 avec une composante continue s'écrit: $s_{\omega_0}(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + a_0$.

Un signal triangulaire s'écrit: $T_{\omega_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 e^{-i(2n+1)\omega_0 t}$ et un signal carré $K_{\omega_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-i(2n+1)\omega_0 t}$.

2) Notion de filtre parfait:

Un filtre parfait est un filtre qui:

- transmet, avec un retard éventuel mais sans déformation, les composante d'un signal dans un domaine de fréquence correspondant à sa bande passante
- élimine les composantes dont les fréquences sont situées hors de sa bande passante.

Ceci est vérifié si:

- pour qu'il n'y ait pas déformation, qu'à la fois la phase et le module de la fonction de transfert ne dépendent pas de la fréquence.

En effet, dans ce cas, un signal d'entrée du type $\underline{e} = \sum_0^{\infty} \underline{c}_n e^{-in\omega_0 t}$ va être transformé par le filtre en un signal $\underline{s} = \sum_0^{\infty} |H| \underline{c}_n e^{-i(n\omega_0 t + \varphi)} = |H| e^{-i\varphi} \sum_0^{\infty} \underline{c}_n e^{-in\omega_0 t}$, signal qui présentera un retard φ et une atténuation $|H|$, mais qui ayant une décomposition en série de Fourier similaire aura la même allure que le signal d'entrée.

- pour qu'il y ait sélectivité parfaite, que $|H| = \begin{cases} 1 \; si \;\; \omega \in b.p. \\ 0 \; si \;\; \omega \notin b.p. \end{cases}$.

Aucun filtre réel n'est parfait. Cependant, plus l'ordre d'un filtre est grand, et plus il se rapprochera de l'idéalité. En effet, le module du gain va tendre d'autant plus vite vers 0 lorsque l'on sort de la bande passante que l'ordre du filtre n est élevé $\alpha \frac{1}{\omega^n}$.

3) Zones d'idéalité pour divers filtres

Hprépa p.104 - 111

Commenter les diverses raisons de déformation (ou de non déformation) du signal. Déjà montrer que pour certains filtres dans certains domaines de fréquence, on a intégration ou dérivation, et enchaîner sur la partie suivante.

C) Réponses temporelles d'un filtre:

1) Caractère intégrateur d'un filtre:

a) Généralités

Considérons un filtre passe – bas de pulsation de coupure ω_c. Sa fonction de transfert s'écrit:

$H(\omega)=\frac{\underline{v}_s(\omega)}{\underline{v}_e(\omega)}=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$, soit $v_s+j\frac{\omega}{\omega_c}v_s=v_e$, ce qui se traduit en notation rélle par l'équation différentielle:

$$\frac{1}{\omega_c}\frac{dv_s}{dt}+v_s=v_e(t).$$

Supposons alors que le signal d'entrée ait une pulsation propre telle que $\omega_0 >> \omega_c$.

Puisque dans l'expression de la fonction de transfert, on aura $j\frac{\omega_0}{\omega_c}>>1$, l'équation différentielle s'écrira alors:

$\frac{dv_s}{dt}=\omega_c v_e$, soit $v_s=\frac{1}{RC}\int v_e dt$.

Le filtre réalise donc une intégration du signal d'entrée. De manière générale, ceci n'est vérifié que pour un domaine de fréquence. On dira alors que le filtre est un filtre *pseudo – intégrateur*.

De manière générale, si on veut qu'un filtre présente un caractère intégrateur, il faut que, pour un signal d'entrée $e_{\omega_0}(t)=\sum_{n>0}a_n\cos(n\omega_0.t+\varphi_n)$, il donne un signal de sortie $s_{\omega_0}(t)=\sum_{n>0}\frac{a_n}{n\omega_0}\cos\left(\omega_0 t+\varphi_n-\frac{\pi}{2}\right)$. Il faut donc que dans le domaine de fréquence considéré:

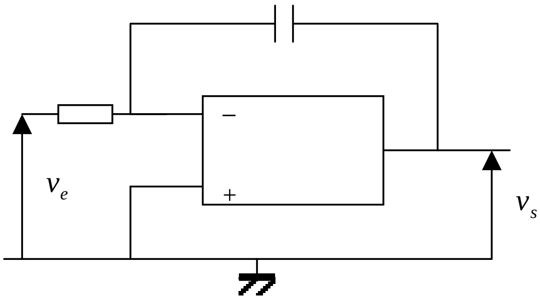
- il y ait un déphasage introduit par le filtre voisin de $-\frac{\pi}{2}$, ou de $\frac{\pi}{2}$ si il y a inversion du signal.
- Un gain en décibel qui vaudra $G(\omega)=20\log\frac{\omega_c}{\omega}$, avec une pente de –20dB par décade, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

Par exemple, cette condition est vérifiée pour un filtre passe-bande d'ordre 2 si $\omega_0 >> \omega_c$.

Pratiquement, ceci est vérifié pour tous les filtres si $\omega_0 > 10\omega_c$

b) Réalisation d'un intégrateur performant:

Les deux exemples précédent présentent un caractère intégrateur uniquement sur un intervalle fréquentiel donné. Nous voulons ici construire un filtre intégrateur sur toutes les fréquences.



Ecrivons le théorème de Millman en A:

On a $0 = \dfrac{\dfrac{v_e}{R} + jC\omega . v_s}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$ soit $v_s = -\dfrac{1}{jRC\omega} v_e$

On a donc bien un filtre intégrateur à toutes fréquences, puisqu'il introduit un déphasage de $\dfrac{\pi}{2}$ (on aura donc également une inversion) et qu'il présente un gain en décibel de la forme $G = 20 \log \dfrac{\omega_0}{\omega}$.

En fait, ce montage n'est que théorique puisqu'il existe des courants de dérive qui chargent le condensateur jusqu'à saturation. Il faut donc pouvoir décharger le condensateur régulièrement. Par ailleurs, le problème posé par une intégration à toutes les fréquences est que si il subsiste une légère composante continue dans le signal d'entrée, celle-ci va également amener l'A.O. à saturation.

Pour résoudre le premier problème, on place une résistance *R*' en parallèle du condensateur.

La nouvelle fonction de transfert va alors s'écrire $H' = -\dfrac{\dfrac{R'}{R}}{1 + R'C\omega}$. Mais ici on peut prendre *R*' très petite pour couvrir un large domaine de fréquence, et on retrouvera alors la fonction de transfert initiale. On voit alors que le second problème est également résolu, puisque pour $\omega = 0$, on a $H' = -\dfrac{R'}{R} << 1$ et que les signaux continus ne sont pas intégrés par le filtre.

2) Caractère dérivateur d'un filtre:

a) Généralités:

Considérons un filtre passe – haut du premier ordre.

Sa fonction de transfert s'écrit $H(\omega) = \dfrac{1}{1 - j\dfrac{\omega_c}{\omega}} = \dfrac{j\omega}{j\omega + \omega_c} = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{j\dfrac{\omega}{\omega_c} + 1}$, ce qui correspond à l'équation différentielle $\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_e}{dt}$. En régime forcé, pour une pulsation $\omega << \omega_c$, on a $v_s = \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{dv_e}{dt}$. On a donc un filtre dérivateur.

De manière générale, il faut que, similairement à ce qu'on a dit pour l'intégrateur que:

- le filtre introduise un déphasage de $\pm\frac{\pi}{2}$
- que le gain s'écrive $G = 20\log\frac{\omega}{\omega_c}$.

Cependant, le problème n'est pas aussi simple que pour l'intégrateur.

En effet, la condition pour l'intégrateur était que $\omega_0 >> \omega_c$, et donc toutes les harmoniques d'un signal de pulsation ω_0 satisfaisaient à cette condition si celle-ci était vérifiée.

Ceci n'est pas le cas pour le dérivateur, puisque ce n'est pas parce que $\omega_0 << \omega$ que les autres harmoniques $n\omega_0$ vérifient cette condition.

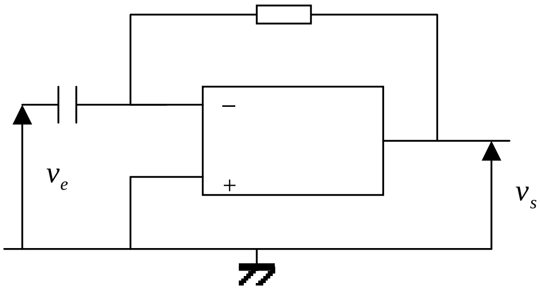
Il faut donc que le gain vérifie la condition $G = 20\log\frac{\omega}{\omega_c}$ pour tous les harmoniques d'amplitude importante du signal d'entrée. Cette condition est vérifiée si $n\omega_0$ est nettement inférieure à la pulsation de coupure basse ω_c. En pratique, ceci se traduit par $n = 10$ et donc $\omega_0 < \frac{\omega_c}{100}$. La condition de dérivation est donc plus drastique que la condition d'intégration.

En particulier pour un filtre passe – bande du second ordre, $\omega_B = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}\right)$, et donc il faut que Q soit petit pour que le filtre soit un dérivateur satisfaisant. On retiendra qu'*un filtre passe – bande ne présente un caractère dérivateur à basse fréquence que s'il est peu sélectif*.

b) Réalisation pratique:

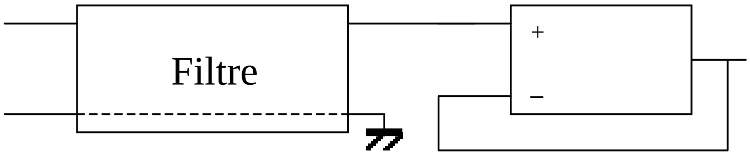
Pour les mêmes raisons que pour l'intégrateur, on va chercher à réaliser un dérivateur qui ne soit pas limité aux basse fréquences, surtout qu'ici la condition est assez drastique.

On obtient ce résultat avec le montage suivant:



Ici on a $v_s = -jRC\omega.v_e$. On a bien un dérivateur à toutes fréquences. Cependant, ce montage n'est que très théorique puisqu'en réalité l' A.O. présente une bande passante limitée, ce qui implique que le filtre réalisé se comporte comme un filtre passe bande de haut facteur de qualité. Pour amoindrir ce phénomène, il faut diminuer le facteur de qualité du système, et pour ce faire on place une résistance supplémentaire juste avant C, le choix optimal de la résistance se faisant empiriquement en observant la réponse du filtre à une excitation triangulaire et en jouant sur la résistance pour se rapprocher le plus d'un signal créneau en sortie.

Conclusion : utilisation des filtres. Toutes les fonction de transfert correspondent à des circuits ouverts. Cependant, lorsqu'on les utilise, les courants de sortie ne sont jamais rigoureusement nuls. C'est pour cela que l'on utilise des filtres actifs:



Ceci sert à effectuer des combinaisons de filtres dont les caractéristiques reproduiront celle du filtre en sortie ouverte.