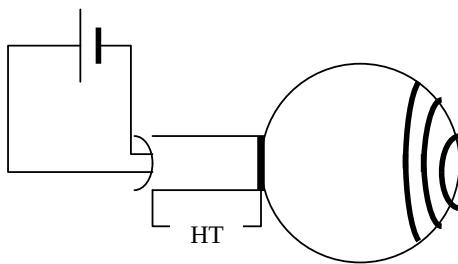


LP 57 Dualité onde – corpuscule: Relation de Louis de Broglie;
Inégalités d'Heisenberg. Applications

Introduction expérimentale:

On considère le dispositif suivant:



On constate les faits suivants:

- si on augmente $E=eV$, on observe une diminution de la taille des anneaux.

On observe un phénomène de diffraction avec les électrons. On peut donc supposer qu'aux électrons est associée une onde, comme les ondes électromagnétiques sont associées aux photons.

C'est la dualité onde – corpuscule, que nous allons

ici étudier.

A) Expérience des fentes d'Young:

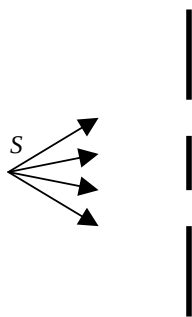
1) Rappel sur les photons:

Nous avons vu précédemment qu'un certain nombre de faits expérimentaux ont conduits les physiciens du début du siècle à introduire l'idée que la lumière était constituée d'un jet de photon où les caractéristiques de l'onde électromagnétique et celles des photons sont liés par:

$$\boxed{\begin{matrix} E = h\nu = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{matrix}}, \text{ où } h \text{ est la constante de Planck}$$

Nous voilà donc revenu à une théorie corpusculaire de la lumière. Faut – il pour autant abandonner la théorie ondulatoire de la lumière? Il n'en est rien, car un certain nombre d'expériences, comme en particulier toutes les expériences de diffraction et d'interférences sont expliquées dans ce cadre et ne peuvent l'être dans un cadre purement corpusculaire. Nous allons maintenant voir pourquoi en revenant sur une expérience très classique d'optique : l'expérience des fentes d'Young.

2) Les trous d'Young:



La lumière monochromatique émise par la source S est tombée sur les deux fentes fines F_1 et F_2 . Lorsque l'une des deux fentes est obstruée, on obtient sur l'écran une répartition de l'intensité lumineuse I_i correspondant la tache de diffraction de la fente ouverte. Par contre, lorsque les deux fentes sont ouvertes, on observe sur l'écran

une répartition de l'intensité $I(x) \neq I_1 + I_2$. On dit alors qu'il y a interférence.

Comment expliquer ce phénomène dans le cadre d'une théorie purement corpusculaire. En fait, on pourrait dire qu'il existe une interaction entre les photons, ce qui induirait que si on diminue le flux de photons émis par la source jusqu'à ce que les photons arrivent un par un sur l'écran, on observerait une atténuation, puis une disparition du phénomène d'interférence.

Que se passe-t-il en fait lorsque l'on émet les photons quasiment un par un?

- a) si on recouvre l'écran d'une plaque photographique ayant un temps de pose suffisamment long pour recevoir un grand nombre de photons, le développement montre que les franges n'ont pas disparu. *Il faut donc rejeter l'interprétation purement corpusculaire de la lumière.*
- b) On peut au contraire prendre un temps de pose suffisamment court pour que le nombre de photons reçu sur l'écran soit faible. On constate alors que chaque photon produit sur *E un impact bien localisé*, et non pas une figure d'interférence de faible intensité. *Il faut donc rejeter également l'interprétation purement ondulatoire de la lumière.*

En réalité, ce qu'il se passe, c'est que les photons arrivent de manière aléatoire sur l'écran, chacun produisant un impact localisé, et ce n'est que quand un grand nombre d'entre eux est arrivé sur l'écran que se reconstitue la figure d'interférence.

Le résultat conduit donc apparemment à un paradoxe, qui par exemple dans la théorie corpusculaire s'exprime comme suit: si ce n'est pas l'interaction entre plusieurs photons qui est à l'origine du phénomène d'interférence, il faut les considérer séparément. Mais alors comment admettre que, pour un photon passant par l'une des fentes, le fait que l'autre soit ouverte ou non ait une importance aussi cruciale?

3) La dualité onde – corpuscule:

Il est donc impossible d'expliquer les phénomènes observés si on ne s'attache qu'à l'un ou l'autre des aspects de la lumière. Le problème est que ces deux aspects semblent s'exclure mutuellement. On est donc amené à remettre en question la vision classique que l'on a de l'un ou l'autre des aspects.

En particulier, on montre que l'on ne peut savoir par quelle fente est passé le photon. On est donc conduit à admettre qu'il passe en fait par les deux fentes en même temps, ce qui remet en cause la notion classique de trajectoire d'un corpuscule. Par ailleurs, les photons sont tous à priori émis de la même manière et cependant ils n'arrivent pas tous au même endroit sur l'écran. On peut seulement dire que la probabilité qu'il frappe l'écran en x est proportionnelle à l'intensité $I(x) = \vec{E}(x)\vec{E}(x)^*$.

Après bien des tâtonnements, on est arrivé à la notion de dualité onde corpuscule, que l'on peut schématiquement résumer ainsi:

- les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière sont inséparables. La lumière se comporte à la fois comme une onde et un corpuscule, l'onde permettant de calculer la probabilité pour qu'un corpuscule se manifeste.
- Les prévisions sur le comportement d'un photon ne peuvent être que du type probabiliste.
- L'information sur un photon à l'instant t est donnée par l'onde $\vec{E}(\vec{r}, t)$, solution des équation de Maxwell. Cette onde est interprétée comme *l'amplitude de probabilité* pour qu'un photon manifeste sa présence à t au point $\vec{r}$.

On peut donc établir une analogie entre l'électromagnétisme et la mécanique quantique:

Optique	Mécanique Quantique
Champ électrique $\vec{E}$	Amplitude de probabilité $\psi(\vec{r}, t)$
Intensité $I = \vec{E} ^2$	Probabilité de présence $dP(x) = \psi \cdot \psi^* dx$
Interférences $I_1 + I_2 + \vec{E}_1 \vec{E}_2 + E_1 \vec{E}_2$	$dP(x) = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)^*$

B) Relations de Louis de Broglie:

1) Extension de la dualité onde – corpuscule:

Par ailleurs, le fait que l'on puisse également obtenir des phénomènes ondulatoires avec des corpuscules comme des électrons montre que cette dualité ne s'applique pas qu'aux photons. La diffraction des électrons faite au début en est le témoin. Par ailleurs, la quantification de l'énergie des atomes implique également cette dualité. Cette hypothèse, émise en 1923 par Louis de Broglie, s'exprime ainsi : *les corpuscules matériels, tous comme les photons, peuvent avoir un aspect ondulatoire*. Les caractéristiques de l'onde associée à un corpuscule sont données par les mêmes relations que pour les photons:

$$\boxed{\begin{matrix} E = h\nu = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{matrix}}, \text{ relations de Louis de Broglie.}$$

Autrement dit la longueur d'onde correspondante vaut $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$.

2) Ordres de grandeur:

A tout corpuscule est donc associé une onde. Cependant, cette propriété est impossible à mettre en évidence au niveau macroscopique. En effet, considérons un grain de poussière de diamètre $1\mu\text{m}$ et de masse 10^{-15}kg . Même pour une masse aussi faible et pour une vitesse 1mm/s , on a $\lambda = 6,610^{-6}\text{\AA}$, ce qui est complètement négligeable à l'échelle de la poussière.

Par contre, considérons un électron.

Supposons le tout d'abord non relativiste, accéléré par une ddp de 1V . Son énergie cinétique vaut alors $E = \frac{p^2}{2m} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C} = 1\text{eV}$. La longueur d'onde associée vaut alors

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{12,3}{\sqrt{V}}\text{\AA}$. Avec des ddp de quelques centaines de volt, on obtient des longueurs d'ondes comparable à celle des rayons X (qq angströms), c'est-à-dire que l'on peut les utiliser pour sonder la matière et mettre en évidence la structure cristalline par diffraction, comme dans l'expérience préliminaire. Par ailleurs, on constate bien la dépendance de la longueur d'onde en tension, c'est à dire qu'une augmentation de V diminue la longueur d'onde, et donc le rayon des anneaux.

Avec les accélérateurs actuels, on peut accélérer les électrons jusqu'à des énergies cinétiques de l'ordre de GeV . L'électron est alors relativiste. Les relations de De Broglie restent valables, mais l'expression de la quantité de mouvement est modifiée:

$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$. On obtient alors $\lambda = \frac{hc}{E} = 1,2 \text{ Fermi}$. On peut alors explorer la structure des noyaux atomiques et en particulier celle des protons.

C) Relations d'Heisenberg:

1) Description quantique d'une particule:

On a vu qu'une particule pouvait être décrite par une amplitude de probabilité $\psi(\vec{r}, t)$. Pour simplifier, supposons le problème unidimensionnel, c'est-à-dire que $\psi(x, t)$. Comme toute onde, cette amplitude de probabilité peut s'écrire comme une somme continue d'ondes planes:

$\psi(x, t) = \int_{k, \omega} dk d\omega \chi(k, \omega) e^{-i(\omega t - kx)}$. On reconnaît là à une constante de normalisation près, la transformée de Fourier. On a alors les relations classiques:

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

$$\Delta t \Delta \omega \approx 1$$

Cependant, s'il est impossible de construire un paquet d'onde tel que $\Delta x \Delta k \ll 1$, il est par contre possible de construire un paquet d'onde tel que $\Delta x \Delta k > 1$. Ainsi on écrira ces relations

sous la forme d'une égalité $\Delta x \Delta k \geq 1$
 $\Delta t \Delta \omega \geq 1$.

Or d'après les relations de Louis de Broglie, on a $E = h\nu = \hbar\omega$, et donc on en déduit les inégalités d'Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Ces inégalités impliquent une réalité physique très importante : si on veut connaître (ou si on impose) la position d'une particule avec précision, cela ne pourra se faire sans introduire une incertitude (ou un étalement) de la quantité de mouvement. Les deux grandeurs ne peuvent donc pas être mesurées simultanément avec une précision arbitraire.

Cependant, ces relations ne sont pas contraignantes au niveau microscopique. En effet, reprenons le grain de poussière de tout à l'heure, de masse $m = 10^{-15} \text{ kg}$ et de vitesse 10^{-3} ms^{-1} . Si on mesure sa position à $0,01 \mu\text{m}$ près par exemple, l'incertitude que cette mesure impose sur la quantité de mouvement vaut: $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} \approx 10^{-26} \text{ kg.ms}^{-1}$, soit une incertitude

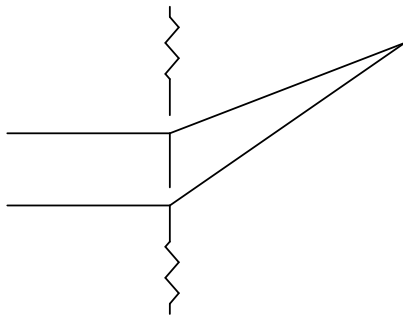
relative de 10^{-8} . Les relations d'Heisenberg ne sont donc pas contraignantes pour les systèmes macroscopiques car pratiquement, un appareil de mesure est incapable d'atteindre une telle précision relative.

Quantiquement, on décrira le grain comme un paquet d'ondes dont la vitesse de groupe vaut $v = 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ et l'impulsion moyenne $p = 10^{-18} \text{ kg.ms}^{-1}$. Mais on peut prendre alors comme extension spatiale du paquet d'onde Δx et comme dispersion en impulsion Δp , tellement petites qu'elles sont totalement inappréciables. Le maximum du paquet d'onde représente alors la position du grain de poussière et son mouvement est identique à celui du corpuscule classique.

2) Conséquences:

Une des premières conséquences des relations d'Heisenberg est le phénomène de diffraction de la lumière. En effet, lorsque un photon arrive sur une fente de largeur $\Delta x = a$, ceci implique que $\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x}$. Or $p = \hbar k$, ce qui implique que $\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}$. De plus, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc $\frac{\Delta k}{k} = 2\pi \frac{\lambda}{a}$. Or dans le phénomène de diffraction à l'infini, on a $\frac{\Delta k}{k} = \Delta(\sin \theta)$. On retrouve alors la diffraction, qui indique que $\Delta(\sin \theta) \geq 2\pi \frac{\lambda}{a}$. Or l'étude classique montre que le gros de l'énergie est étalé selon entre les directions $-\frac{\lambda}{a}$ et $\frac{\lambda}{a}$, soit $\Delta(\sin \theta) = \frac{2\lambda}{a}$. En fait, l'étalement est plus grand, puisqu'il y a les maxima secondaires.

Pour illustrer les conséquences pratiques de la relation d'Heisenberg, faisons un petit retour sur l'expérience des trous d'Young. Dans une approche corpusculaire, on peut se demander par quel trou est passé l'électron qui fait un impact sur l'écran.



Supposons alors que la plaque P dans laquelle les deux trous sont percés soit montée de manière à pouvoir se déplacer dans son plan. L'impulsion d'un photon passant à travers P change lors de ce passage, et la conservation de la quantité de mouvement implique que P absorbe la différence. Mais l'impulsion ainsi transférée à P dépend du trajet qu'à emprunter le photon. S'il passe par F_1 ou par F_2 , elle vaut $p_1 = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta_1$ ou $p_2 = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta_2$.

Si on laisse alors arriver les photons un par un sur l'écran, on pourra alors déterminer par quel trou est passé chacun des photons. En fait il n'en est rien: les franges disparaissent avec ce dispositif (ainsi d'ailleurs qu'avec tout dispositif tentant de déterminer la "trajectoire" du photon).

En effet, si l'on veut savoir par quel trou le photon est passé, il faut que l'incertitude sur la mesure de l'impulsion soit inférieure à la différence des deux impulsions, soit $\Delta p \ll |p_1 - p_2|$.

Mais alors la relation d'incertitude de Heisenberg implique que $\Delta x \geq \frac{h}{|p_1 - p_2|}$.

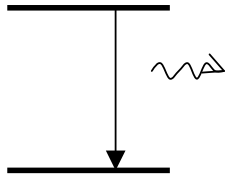
En supposant que l'écart entre les deux fentes a est petite devant la distance d de P à l'écran, on a $\sin \theta_1 = \theta_1 = \frac{x - a/2}{d}$ et $\sin \theta_2 = \theta_2 = \frac{x + a/2}{d}$. On aura alors:

$$|p_1 - p_2| = \frac{h\nu}{c} \frac{a}{d} = \frac{h}{\lambda} \frac{a}{d}. \text{ On aura alors } \Delta x \geq \frac{\lambda d}{a}.$$

Mais cette grandeur est également l'interfrange. Si la position des fentes n'est définie qu'avec une précision supérieure à l'interfrange, il ne peut être question d'observer la figure d'interférence.

Ceci montre que les aspects corpusculaire et ondulatoire de la lumière sont indissociables : sitôt que l'on essaye d'en isoler un, le phénomène d'interférences disparaît. Par ailleurs ceci est une application fondamentale du principe d'incertitude d'Heisenberg, qui montre que l'on ne peut effectuer une mesure sur un système sans l'affecter de manière fondamentale, en imposant une incertitude sur une grandeur.

Une dernière conséquence du principe d'Heisenberg est la largeur spectrale des raies d'émission des atomes. En effet, l'émission atomique se fait selon le schéma suivant:



Considérons alors une population d'électrons dans l'état excité. Le nombre d'atomes moyen passant de l'état excité à l'état fondamental vaut $\frac{1}{\tau}$, c'est-à-dire que le temps de vie moyen d'un électron dans un état excité vaut τ . Ceci implique que l'incertitude sur le temps vaut

$\Delta t = \tau$. La relation d'incertitude d'Heisenberg donne alors $\Delta E \geq \frac{\hbar}{\tau}$.

Les niveaux d'énergie présentent donc fondamentalement une largeur, indépendamment des autres causes que sont l'agitation thermique et les collisions. Ceci se traduit, comme l'énergie des photons émis vaut $E = h\nu$, par un élargissement spectral de la raie.