Séance de TP 3
Réfraction des rayons lumineux

Romain BEL

21 novembre 2001

Table des matières

1 Rayon lumineux, principe de Fermat et réfraction **3**
1.1 Notion de rayon lumineux, chemin optique 3
1.2 Principe de Fermat. Lois de la réfraction 4

2 Constructions **5**
2.1 Notion de stigmatisme. Construction d'une image. 5
2.2 Construction de Huygens. Angle limite. 6

3 Dioptre plan **7**

4 Expériences **8**
4.1 Mesure de l'indice de l'eau 8
4.2 Mesure de l'indice de l'eau en utilisant le dioptre à faces parallèles . 9
4.3 Mesure de l'indice de l'eau (one more time) 9

5 Exercices **10**
5.1 Arc-en-ciel 10

1 Rayon lumineux, principe de Fermat et réfraction

1.1 Notion de rayon lumineux, chemin optique

Considérons une source lumineuse, ainsi qu'un diaphragme circulaire de diamètre D.

Si $D > \lambda$, on a un faisceau cylindrique lumineux. Par contre, lorsque D devient comparable à la longueur d'onde du rayonnement, la diffraction commence à jouer et le faisceau devient divergent.

On appelle alors *rayon lumineux* l'objet (très théorique) qui consiste à réduire le diamètre du diaphragme à un infiniment petit, en négligeant les effets de la diffraction.

Dans un milieu homogène, on observe qu'un rayon lumineux se propage en ligne droite. Afin de définir la "distance optique" parcouru par ce rayon entre deux points A et B, on définit un *chemin optique* par:

$$L = n\widehat{AB}$$

où n est l'indice du milieu (eau $n \approx 1{,}33$, verre $n \approx 1{,}6$), défini par $\frac{c}{v}$, et $\widehat{AB}$ est la distance curvilignes séparant A et B.

Cette relation se généralise à un milieu non homogène par:

$$L = \int_A^B n(s)ds$$

1.2 Principe de Fermat. Lois de la réfraction

Le principe de Fermat est un principe qui permet de généraliser à tout milieu l'observation qu'un rayon lumineux se propage en ligne droite dans un milieu homogène. Il s'exprime ainsi :

> Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur stationnaire (de manière très générale à un minimum) du chemin optique par rapport aux trajets fictifs voisins allant de A à B.

Ceci signifie, plus simplement, que le trajet pris effectivement par un rayon lumineux va correspondre, si l'on considère tous les chemins possibles pour aller de A à B, à celui qui correspond à une valeur extrêmale du chemin optique, en général à un minimum.

On peut avec ce principe retrouver d'une part la propagation en ligne droite dans un milieu homogène. En effet, si $L = n\widehat{AB}$ est minimum et que n est constant, ceci signifie que $\widehat{AB}$ est minimum, et donc que le trajet se fait en ligne droite.

On peut ensuite en tirer les lois de la réfraction :

FIG. 1 – *Construction du rayon réfracté et de l'image*

Le chemin optique de A à B s'écrit :

$$L_{A-B} = n_1 AH + n_2 BH = n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}$$

D'après le principe de Fermat, on doit minimiser cette distance, et le seul paramètre variable étant x, on a:

$$dL_{A-B} = n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} dx + n_2 \frac{x - x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}} dx$$

Or on a:
- $\frac{x}{\sqrt{x^2+y_A^2}} = \sin i$
- $\frac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^2+y_B^2}} = -\sin r$

ce qui implique directement la loi de la réfraction:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

2 Constructions

2.1 Notion de stigmatisme. Construction d'une image.

De manière générale, on appelle stigmatisme la notion suivante :

> Soit un système optique (S)(lentille, interface entre deux milieux, miroir...) et deux points A et A'. Le système (S) est dit rigoureusement stigmatique pour le couple A A' si tout rayon issu de A passe par A' après avoir traversé le système.

Comme système rigoureusement stigmatique, on peut citer le miroir plan et les couples de points A A' tels que A' est le symétrique de A par rapport au miroir. Par contre, une lentille mince n'est stigmatique que dans les conditions de Gauss. On parle alors de *stigmatisme approché* .

Qu'en-est-il de l'interface entre deux milieux?

Si l'on suppose que ce système est rigoureusement stigmatique, ceci signifie que l'on n'a besoin que de deux rayons issus de A pour construire l'image A' (qui se trouvera alors à l'intersection de ces deux rayons).

Calculons alors, d'après la figure 1 droite, la position de l'image A':

$$\begin{aligned} HA' &= HA \frac{\tan i}{\tan r} \\ &= HA \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos r}{\cos i} \\ &= HA \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin i)^2}}{\cos i} \end{aligned} \tag{1}$$

Comme HA est fixée, ainsi que les deux indices, on voit que la position de A' dépend de i, ce qui est en contradiction avec la notion de stigmatisme rigoureux.

Cependant, si $i << 1$, on a:

$$\begin{aligned} HA' &= HA\frac{\tan i}{\tan r} \\ &\approx HA\frac{\sin i}{\sin r} \\ &= HA\frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \tag{2}$$

Dans la limites des petits angles, l'interface entre deux milieux optiques différents est donc stigmatique.

2.2 Construction de Huygens. Angle limite.

Pour construire graphiquement le rayon réfractées, on peut utiliser la *construction de Huygens* (fig.2).

FIG. 2 – *Construction de Huygens*

Ceci permet de distinguer deux cas, selon que $n_1 < n_2$ ou $n_1 > n_2$. En effet, dans le premier cas, la construction de Huygens est toujours possible, et il y a donc toujours un rayon réfracté quelque soit le rayon incident. Par contre, dans le second cas, il existe un angle limite au-delà duquel il n'existe pas de rayon réfracté (fig.3).

FIG. 3 – *Angle limite*

On peut alors évaluer la valeur de cet angle limite lorsque $n_1 > n_2$ (passage eau vers air par exemple). Il correspond à :

$$n_1 \sin(i_{lim}) = n_2$$

c'est-à-dire à:

$$i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

3 Dioptre plan

Nous allons maintenant étudier un système appelé *dioptre plan* (fig. 4).

Les lois de la réfraction imposent que le rayon émergeant du dioptre plan est parallèle à la direction du rayon incident. On peut par ailleurs calculer la distance d qui sépare les deux directions. On a :

$$\begin{aligned} d &= (e\tan(i) - e\tan(r))\cos(i) \\ &= e\left(\sin(i) - e\frac{\cos(i)\sin(r)}{\cos(r)}\right) \\ &= e\sin(i)\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\frac{\cos(i)}{\cos(r)}\right) \\ &\approx e\sin(i)\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

FIG. 4 – *Dioptre plan*

si les angles sont petits.

4 Expériences

4.1 Mesure de l'indice de l'eau

Nous allons utiliser le dispositif suivant : une cuve demi-cylindrique, posée sur un rapporteur, de telle sorte que le centre de la courbure de la cuve coïncide avec le centre du rapporteur. La cuve est remplie d'eau, ainsi que d'un liquide diffusant qui permet de visualiser le rayon lumineux(Fig. 5). On va envoyer, dans les deux sens, un rayon lumineux à l'aide d'un laser vers le centre de la cuve, et mesurer à la fois i et r. Ensuite, à l'aide d'un traitement informatique, on en déduira la valeur de l'indice de l'eau, en même temps que l'on vérifiera la propriété de trajet inverse de la lumière.

FIG. 5 – *Cuve semi-cylindrique*

4.2 Mesure de l'indice de l'eau en utilisant le dioptre à faces parallèles

Dans un aquarium rempli d'eau, on envoie un faisceau laser juste à l'interface entre les deux milieux. Il en résulte une séparation du faisceau en deux, l'un étant dévié par le liquide, l'autre non. On peut alors mesurer la déviation effectuée par le liquide, et éventuellement en déduire l'indice de l'eau. Il faut vérifier que la déviation induite par le verre est négligeable.

4.3 Mesure de l'indice de l'eau (one more time)

On reprend l'aquarium ainsi que deux règles graduées identiques. On en plonge une verticalement dans l'eau et collée à la paroi et on place l'autre à l'extérieur de l'aquarium, collée de l'autre côté de la paroi.

On déplace alors la règle située à l'extérieur, par exemple, jusqu'à observer la coïncidence de toutes les graduations, c'est-à-dire lorsque l'objet dans l'eau et l'objet hors de l'eau sont observés sous le même diamètre apparent. On a alors (fig. 6):

$$\frac{h}{d+h} = \frac{h \tan r}{d \tan i}$$

FIG. 6 – *Différences de longueur*

ce qui implique que:

$$d \tan i = d \tan r + h \tan r$$

si les angles sont petits, ceci se réécrit, en utilisant les lois de la réfraction:

$$d = \frac{n_1}{n_2}(d + h)$$

ce qui permet de relier h à d par:

$$h = d\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

La mesure de h et d donne donc accès à l'indice de l'eau.

5 Exercices

5.1 Arc-en-ciel

Calculer D en fonction de i et r, maximiser D et trouver le i correspondant au maximum d'intensité en fonction de n. Pourquoi arc de cercle? Disposition des couleurs sachant que $n = n_0 + \frac{C}{\lambda_0^2}$

FIG. 7 – *Principe de l'arc-en-ciel*

Solution :

$$D = 4r - 2i$$

On minimise en fonction de i et on obtient:

$$\frac{dD}{di} = 4\frac{dr}{di} - 2$$

Or on a par ailleurs $\cos idi = ncosrdr$ soit:

$$\frac{dD}{di} = 4\frac{\cos i}{n \cos r} - 2$$

On a donc comme condition:

$$2 \cos i = n \cos r$$

ce qui donne:

$$\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$$

On a un arc de cercle puisque le problème à une symétrie de révolution autour de la direction du soleil, le haut du cercle étant fixé par l'intersection entre la direction du soleil et celle de l'observateur.

On a par ailleurs, pour i fixé:

$$\begin{aligned} dD &= 4dr \\ &= -\frac{4}{n}\tan r dn \\ &= \frac{8C}{n\lambda_0^3}\tan r d\lambda_0 \end{aligned}$$

La déviation augmente donc avec la longueur d'onde, ce qui implique que le bleu est en bas (à l'intérieur) et le rouge en haut (à l'extérieur, plus grande déviation).